ÍNDICE DE APUNTES:

UNIDADES		*PÁG.*
Unidad 1. Números reales. Unidad 2. Potencias y raíces.		1
+ ÁLGEBRA:		
Unidad 3. Polinomios. Unidad 4. Fracciones algebraicas.		7
Unidad 5. Ecuaciones de primer y segundo grado. Ecuaciones mayor de 2º grado		12
Unidad 6. Ec. bicuadradas; Ec. racionales; Ec. irracionales; Ec. logarítmicas; Ec. Exponenciales.		14
Unidad 7. Sistema de ecuaciones		16
Unidad 8. Sistemas de ecuaciones no lineales.		18
Unidad 9. Inecuaciones de primer y segundo grado. Sistemas de inecuaciones.		19
+ TRIGONOMETRÍA:		22
Unidad 10 Y 11. Trigonometría 1.		
+ ANÁLISIS DE FUNCIONES:		30
Unidad 12. Funciones polinómicas.		
Unidad 13. Funciones de proporcionalidad inversa. Funciones racionales.		
Unidad 14. Funciones exponenciales y logarítmicas.		
+ TEMAS DE OPCIÓN A:		
Unidad 15. Estadística.	(A)	42
Unidad 16. Técnicas de recuento.	(A)	
Unidad 17. Probabilidad.	(A)	49

UNIDAD 1. *NÚMEROS RACIONALES.* **UNIDAD 2. *POTENCIAS Y RAICES.***

1.1. NÚMEROS RACIONALES. EXPRESIONES DECIMALES
1.2. NÚMEROS IRRACIONALES.
1.3. NÚMEROS REALES. ORDEN Y REPRESENTACIÓN EN LA RECTA REAL.
1.4. INTERVALOS, ENTORNOS Y VALORES ABSOLUTOS
1.5. POTENCIAS
1.6. RADICALES
1.7. NOTACIÓN CIENTIFICA
1.8. LOGARITMOS

1.1. NÚMEROS RACIONALES. EXPRESIONES DECIMALES

Definición: Llamaremos **fracción** a una expresión matemática del tipo $\frac{a}{b}$, siendo a y b números enteros y $b \neq 0$. $\frac{a \rightarrow \text{numerador}}{b \rightarrow \text{denominador}}$

Definición: Los **números racionales** son los que se pueden escribir en forma de fracción. $Q=\left\{\frac{a}{b} / \, a, b \in Z \text{ y } b \neq 0\right\}$

Suma y resta de fracciones:

a. Igual denominador: Se suman o se restan los numeradores y se deja el mismo denominador:
b. Distinto denominador: Se reduce a común denominador y se opera como en el caso anterior a)

Producto de fracciones: El producto de dos fracciones es una fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador el producto de los denominadores. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

División de fracciones: Dividir dos fracciones es multiplicar la primera por la inversa de la segunda. Es decir multiplicamos en cruz. X $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Representación en la recta

Utilizando el teorema de Tales (división de un segmento en partes iguales), o haciendo la división y representar aproximadamente.

Expresiones decimales.

Toda fracción irreducible tiene una expresión decimal, que se obtiene dividiendo numerador entre denominador. (Ejemplo: $\frac{1}{3} = 0'33333.....33.....= 0'\widehat{3}$; $\frac{1}{6} = 0'166666...66.....= 1'1\widehat{6}$; $\frac{2}{5} = 0'4$)

Las expresiones decimales pueden ser : $\begin{cases} \text{exactas} \\ \text{Periódicas} \begin{cases} \text{Puras} \\ \text{Mixtas} \end{cases} \end{cases}$

Importante: Toda expresión decimal exacta o periódica se puede expresar en forma de fracción Si la expresión no es exacta ni periódica (es decir ilimitada no periódica) no se puede expresar como fracción. A todos estos números se les llama **números irracionales.**

Paso de número decimal a fracción

Decimal exacto	$\frac{\text{número sin coma}}{\text{1 seguido de tantos 0 como cifras decimales}}$	$2'305 = \frac{2305}{1000}$
Decimal periódico puro	$\frac{\text{número sin coma y sin gorrito - parte entero}}{\text{tantos 9 como cifras tiene el periodo}}$	$12'\overline{35} = \frac{1235-12}{99}$
Decimal periódico mixto	$\frac{\text{número sin coma y sin gorrito - número sin coma y sin periodo}}{\text{tantos 9 como cifras tiene el periodo y 0 como decimales no periodicos}}$	$3'756\widehat{} = \frac{3756-375}{900}$

1.2. NÚMEROS IRRACIONALES

Radicales: $\sqrt{2};\sqrt[3]{16};1+\sqrt{7}$. Número áureo: $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Número pi: π=3´141592..... Número e=2´71828... Todos estos números no se pueden escribir en forma de fracción: SON IRRACIONALES.

La forma de escritura más sencilla y exacta es llamarlo con alguna letra (π, e) o con la operación con la que surgen ($\sqrt{2};\sqrt[3]{16}$)

1.3. NÚMEROS REALES. ORDEN Y REPRESENTACIÓN EN LA RECTA REAL

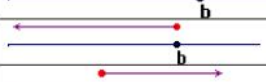
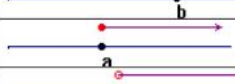
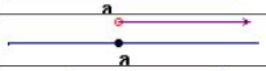
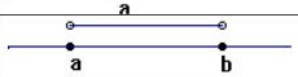
El conjunto formado por los números racionales y los irracionales se llama conjunto de los **números reales (IR).**

Para representarlos y ordenarlos se pasan a número decimal. (La representación es casi siempre aproximada, aunque hay algunos irracionales que se pueden representar de manera exacta, como loas raíces cuadradas)

1.4. INTERVALOS, ENTORNOS Y VALORES ABSOLUTOS

Intervalos: Los intervalos numéricos son conjuntos de números y se representan mediante un segmento con o sin extremos. Pueden ser acotados o no acotados(Semirrectas)

Intervalos no acotados (Semirrectas): Los intervalos no acotados se representan mediante una semirrecta.

Expresión verbal	Desigualdad	Gráfica	Intervalo
Números menores que b	$x<b$		$(-\infty,b)$
Números menores o iguales que b	$x\le b$		$(-\infty,b]$
Números mayores o iguales que a	$x\ge a$		$[a,+\infty)$
Números mayores que a	$x>a$		$(a.+\infty)$
Números mayores que a y menores que b	$a<x<b$		(a,b)
Números mayores o iguales que a y menores o iguales que b.	$a\le x\le b$		$[a.b]$
Números mayores o iguales que a y menores que b.	$a\le x<b$		$[a,b)$
Números mayores que a y menores o iguales que b.	$a<x\le b$		$(a,b]$

Incluido significa que puede ser igual, se representa con un punto relleno ●, y va con corchete [ó]. No incluido significa que no puede ser igual, se representa con un punto blanco ○, y va con paréntesis (ó). El infinito como no es ningún número va siempre con paréntesis.

Unión de intervalos: Juntar los intervalos. $[-2,5)\cup(3,8]=[-2,8]$

Intersección de intervalos: Lo que tienen en común. $(-\infty,3]\cap(-4,+\infty)=(-4,3]$

Entornos: Llamaremos entorno al conjunto de número que están alrededor de un número. Necesitamos dos referencias: el número (centro) y la distancia máxima (radio).

$E(c,r)=\{x\in IR/|x-c|<r\}=(c-r,c+r)$ Ejemplo: $E(1,5)=(1-5,1+5)=(-4,6)$

Si nos dan un intervalo para pasarlo a entorno debemos encontrar el centro (punto medio del intervalo) y el radio (distancia de un extremo al centro)

$(a,b)=E\left(\frac{a+b}{2},\frac{b-a}{2}\right)$ Ejemplo: $(-4,6)=E\left(\frac{-4+6}{2},\frac{6-(-4)}{2}\right)=E(1,5)$

Desigualdades y valores absolutos:

- $|x-c|<r$. Dará lugar a la desigualdad $-r<x-c<r$ pasamos c a ambos lados sumando $c-r<x<c+r$ Será el intervalo $(c-r,c+r)$ y por lo tanto el entorno $E(c,r)$
- $|x-c|>r$. Dará lugar a la desigualdad $-r>x-c>r$ pasamos c a ambos lados sumando $c-r>x>c+r$ Será los intervalos $(-\infty,c-r)\cup(c+r,+\infty)$

1.5. POTENCIAS

Por definición $a^0 = 1$ $\quad a^1 = a$ $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad$ Importante $(-a)^n = \begin{cases} a^n \text{ si } n \text{ es par} \\ -a^n \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Propiedades:

1.- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\quad$ 2.- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\quad$ 3.- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

4.- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad$ 5.- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

1.6. RADICALES

Reducción de radicales a índice común.

Pasos a seguir:

1. Hallar el m.c.m. de los índices
2. Colocarlos radicales cuyo índice sea el m.c.m.
3. Dividir el m.c.m. por el índice anterior y multiplicar por el exponente del radicando inicial

$\sqrt[3]{7}; \sqrt[6]{5^2}; \sqrt[5]{3^4}$

m.c.m.(3,6,5)=30

$\sqrt[30]{7^{10}}; \sqrt[30]{5^{10}}; \sqrt[30]{3^{24}}$

Multiplicación y división de radicales.

- Si tienen el mismo índice → Mismo índice y se multiplican o dividen los radicandos

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2 \cdot 8 \cdot 6} = \sqrt[3]{96}$ $\quad$ $\frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{18}{6}} = \sqrt[3]{3}$

- Si tienen distinto índice → se reduce a igual índice y posteriormente se multiplican o dividen los radicales $\sqrt[6]{5} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{7^3} = \sqrt[6]{5} \cdot \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{(7^3)^3} = \sqrt[6]{5 \cdot 2^2 \cdot 7^9}$

$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{2^8}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^8}{2^3}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$

Introducción y extracción de factores bajo el mismo radical.

Introducción: Para introducir un número dentro de un radical es necesario elevarlo al índice del radical: $3 \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 2}$ $\quad a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$

Extracción: Para extraer un factor de un radical es necesario que esté elevado al índice del radical. Lo sacamos fuera eliminando el índice. $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$. Muchas veces es necesario descomponer en factores primos el radicando.

Ejemplo:

$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 5 \cdot \sqrt[3]{2}$ $\quad \sqrt[3]{a^{17}} = [17:5 = 3 sobran 2] = a^5 \cdot \sqrt[3]{a^2}$

$\sqrt[7]{a^{23} \cdot b^{16} \cdot c^5 \cdot d^{49}} = a^3 \cdot b^2 \cdot d^7 \cdot \sqrt[7]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^5}$

Suma de radicales.

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ No se puede hacer.

No se pueden sumar radicales, lo único que podemos hacer es agrupar radicales iguales.

$\sqrt{45}+\sqrt{20}$ Aparentemente no se puede hacer nada, pero vamos a descomponer los radicandos y extraer los factores que podamos. $45=3^2\cdot 5$ $20=2^2\cdot 5$

$$\sqrt{45}+\sqrt{20}=\sqrt{3^2\cdot 5}+\sqrt{2^2\cdot 5}=3\sqrt{5}+2\sqrt{5}=5\sqrt{5}$$

$$\sqrt{27}+\sqrt{12}-\sqrt{75}-\sqrt{3}=\sqrt{3^3}+\sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{3\cdot 5^2}-\sqrt{3}=$$

$$3\sqrt{3}+2\sqrt{3}-5\sqrt{3}-\sqrt{3}=-1\sqrt{3}=-\sqrt{3}$$

Potencia de un radical.

Para realizar la potencia un radical multiplicamos los exponentes de la potencia y el radicando. $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p=\sqrt[n]{a^{m\cdot p}}$ $\left(\sqrt[3]{7}\right)^2=\sqrt[3]{7^2}$

$$\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^4=\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{a^2\cdot a^2\cdot a^2\cdot a^2}=\sqrt[3]{a^8}$$

$$\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^4=\sqrt[3]{a^{2\cdot 4}}=\sqrt[3]{a^8}$$

Raíz de un radical.

Para realizar la raíz de un radical multiplicamos los índices de los radicales. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[p\cdot n]{a}$

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{a}}}}=\sqrt[3\cdot 5\cdot 2\cdot 4]{a}=\sqrt[120]{a}$$

Racionalización.

La racionalización consiste en eliminar los radicales de los denominadores de las fracciones.

1er Caso: <u>Raíces Cuadradas</u>

Multiplicamos numerador y denominador por la raíz del denominador:

$$\frac{2}{5\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{5\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{5\cdot\sqrt{3^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{5\cdot 3}=\frac{2\sqrt{3}}{15}$$

2º Caso: <u>Otras Raíces</u>

Multiplicamos el numerador y el denominador por un radical de índice el del denominador anterior y radicando la potencia del radicando anterior que nos falta para llegar al índice del radical.

$\frac{8}{\sqrt[5]{7^2}}=\frac{8\cdot\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^2}\cdot\sqrt[5]{7^3}}=\frac{8\cdot\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^5}}=\frac{8\cdot\sqrt[5]{7^3}}{7}$ Multiplicamos por $\sqrt[5]{7^3}$ porque nos falta a 3 para llegar a 5.

3er Caso: <u>Suma y resta de Raíces cuadradas</u>:

Multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

La operación conjugada de la suma es la resta y la de la resta la suma. El conjugado de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es $\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Si nos damos cuenta al multiplicarlos

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=2-3=-1$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{1\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

Expresión de los radicales en forma de potencia

Todos los radicales se pueden expresar en forma de potencia de la siguiente forma $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Esto explica muchas de las propiedades de los radicales.

1.7. NOTACIÓN CIENTIFICA

EJEMPLO

Realiza las siguientes operaciones.

$\mathbf{3{,}5 \cdot 10^3 + 5{,}2 \cdot 10^3} = (3{,}5 + 5{,}2) \cdot 10^3 = \boxed{8{,}7 \cdot 10^3}$

→ Si los exponentes de las potencias son iguales, se suman los números decimales y se deja la misma potencia de base 10.

$\mathbf{3{,}5 \cdot 10^4 + 5{,}2 \cdot 10^3} = 3{,}5 \cdot 10^4 + 0{,}52 \cdot 10^4 =$

→ Si los exponentes de las potencias son diferentes, se reduce al mayor.

$= (3{,}5 + 0{,}52) \cdot 10^4 = \boxed{4{,}02 \cdot 10^4}$

→ Luego se suman los números decimales y se deja la misma potencia de base 10.

EJEMPLO

$\mathbf{3\,457 \cdot (4{,}3 \cdot 10^4)}$

→ Pasamos a notación científica: $= (3{,}457 \cdot 10^3) \cdot (4{,}3 \cdot 10^4) =$

→ Multiplicamos los números y las potencias de 10: $= (3{,}457 \cdot 4{,}3) \cdot 10^3 \cdot 10^4 =$

→ Escribimos el resultado: $= 14{,}8651 \cdot 10^7 =$

→ Pasamos a notación científica: $= \boxed{1{,}48651 \cdot 10^8}$

EJEMPLO

$\mathbf{14\,000\,000 : (3{,}2 \cdot 10^{12})}$

→ Pasamos a notación científica: $= (1{,}4 \cdot 10^7) : (3{,}2 \cdot 10^{12})$

→ Dividimos las partes enteras o decimales y las potencias de 10: $= \frac{(1{,}4 \cdot 10^7)}{(3{,}2 \cdot 10^{12})} = \frac{1{,}4}{3{,}2} \cdot \frac{10^7}{10^{12}}$

→ Escribimos en notación científica: $= 0{,}4375 \cdot 10^{-5}$

→ Pasamos a notación decimal: $= \boxed{4{,}375 \cdot 10^{-6}}$

1.8. LOGARITMOS

Los logaritmos fueron introducidos en las matemáticas con el propósito de facilitar, simplificar o incluso, hacer posible complicados cálculos numéricos. Utilizando logaritmos podemos convertir : productos en sumas, cocientes en restas, potencias en productos y raíces en cocientes.

Definición: Se llama ***logaritmo*** *en base a del número x* al exponente *b* al que hay que elevar la base para obtener dicho número.

$$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$$

que se lee : "el logaritmo en base *a* del número *x* es *b*" , o también : "el número *b* se llama logaritmo del número *x* respecto de la base *a* " .

Como podemos ver, **un logaritmo no es otra cosa que un exponente**, hecho que no debemos olvidar cuando trabajemos con logaritmos.
La constante **a** es un número real positivo distinto de 1, y se denomina base del sistema de logaritmos. La potencia a^b, para cualquier valor real de b solo tiene sentido si $a > 0$.

Ejemplo: $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$; $\log_5 \frac{1}{25} = -2$ porque $5^{-2} = \frac{1}{25}$

Propiedades :

• $\log_a 1 = 0$	• $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
• $\log_a a = 1$	• $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
• $\log_a a^x = x$	• $\log_a (u^n) = n \cdot \log_a u$
• $a^{\log_a x} = x$	• $\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u$

Logaritmos Decimales : Se llaman logaritmos decimales o vulgares a los logaritmos que tienen por base el número 10. Al ser muy habituales es frecuente no escribir la base.

$$\log_{10} x = \log x$$

Logaritmos Neperianos :
Se llaman logaritmos neperianos, naturales o hiperbólicos a los logaritmos que tienen por base el número *e*.

$$\log_e x = \ln x = Lx$$

Cambio de base: El logaritmo en base a de un número se puede obtener a partir de logaritmos en otra base

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

UNIDAD 3. *POLINOMIOS* **UNIDAD 4. *FRACCIONES ALGEBRAICAS***

3.1. CONCEPTOS
3.2. VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO
3.3. PRODUCTOS NOTABLES
3.4. DIVISIÓN DE POLINOMIOS
3.5. REGLA DE RUFFINI
3.6. TEOREMA DEL RESTO
3.7. RAÍCES DE UN POLINOMIO
3.8. DESCOMPOSICIÓN DE UN POLINOMIO
4. FRACCIONES ALGEBRAICAS

3.1. CONCEPTOS

MONOMIO: Producto de números y letras

Coeficiente: Número que acompaña a las letras

Parte literal: Producto de las letras

Grado: Suma de los exponentes de las letras

$6x^2$	$-5ab^2c^3$	$\frac{13}{2}xy^2z$
6	-5	$\frac{13}{2}$
x^2	ab^2c^3	xy^2z
2	1+2+3=6	1+2+1=4

Monomios semejantes: Son aquellos que tienen la misma parte literal. $6x^2$; $-7x^2$

Monomios opuestos: Son aquellos que son semejantes y tienen los coeficientes opuestos. $6x^2$ y $-6x^2$.

POLINOMIO: Suma y resta de monomios. A los monomios que lo forman los llamamos **términos.** Se dice que es **Reducido** si los monomios no son semejantes. Normalmente los polinomios los expresaremos con letras mayúsculas, empezando por la P, y entre paréntesis las letras que lleve $P(x,y,z)=3x^2y^5+12x^8-4x^4yz^4-13$

Grado: Mayor de los grados de los monomios que lo forman: El polinomio anterior es de grado 9.
Término independiente: Monomio de grado cero (no lleva letras). (-13)
Polinomio completo: Aquel que poseo términos de todos los grados inferiores al grado del polinomio.
Polinomio ordenado: Los términos vienen ordenados por grados.

$4x^5-6x^4+3x^3+7x^2-x-12$ Es un polinomio completo y ordenado

3.2. VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

Es el resultado que se obtiene al sustituir las letras por números determinados.

Ejemplo: Calcula el valor numérico de $P(x)=3x^3+7x^2-x-12$ para x=2 y x=-1.
$P(2)=3\cdot2^3+7\cdot2^2-2-12=3\cdot8+7\cdot2-2-12=24+14-2-12=24$; $P(-1)=3(-1)^3+7(-1)^2-(-1)-12=3(-1)+7\cdot1+1-12=-3+7+1-12=\boxed{-7}$

3.3. PRODUCTOS NOTABLES

Cuadrado de una suma: El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero más el cuadrado del segundo más el doble producto del primero por el segundo. $\boxed{(a+b)^2=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b}$

Cuadrado de una diferencia: El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero más el cuadrado del segundo menos el doble producto del primero por el segundo. $\boxed{(a-b)^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b}$

Suma por diferencia: Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados (cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo). $\boxed{(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2}$

Ejemplos: $(2x+5)^2=(2x)^2+5^2+2\cdot2x\cdot5=\boxed{4x^2+25+20x}$

$(4-3x)^2=4^2+(3x)^2-2\cdot4\cdot3x=\boxed{16+9x^2-24x}$ $\quad(7x+6)(7x-6)=(7x)^2-6^2=\boxed{49x^2-36}$

3.4. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

De monomios: Dividimos los coeficientes y la parte literal, que como son potencias, restamos los exponentes

$40x^8 : 8x^5 = (40:8)x^{8-5} = 5x^3$

Pasos a seguir:

$(6x^4 - 13x^2 + 49x - 15) : (2x^2 - 4x + 5)$ ⇨

1. Dividimos los monomios de mayor grado
2. Multiplicamos el resultado por el divisor.
3. Restamos al dividendo el resultado anterior
4. Este resultado será el nuevo dividendo. Volvemos a repetir el proceso hasta que el grado dividendo sea menor que el del divisor (Resto)

$(6x^4) : (2x^2) = 3x^2$

$3x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 5) =$

$6x^4 + 12x^3 - 15x^2$

$6x^4 \quad -13x^2 + 49x - 15$

$-6x^4 + 12x^3 - 15x^2$

$12x^3 - 28x^2 + 49x - 15$

$6x^4 \quad -13x^2 + 49x - 15 \;\big|\; 2x^2 - 4x + 5$

$-6x^4 + 12x^3 - 15x^2 \qquad 3x^2 + 6x - 2$

$12x^3 - 28x^2 + 49x$

$-12x^3 + 24x^2 - 30x$

$-4x^2 + 19x - 15$

$4x^2 - 8x + 10$

$\underbrace{11x - 5}_{\text{resto}}$

3.5. REGLA DE RUFFINI

La regla de Ruffini nos va a permitir dividir polinomios por del tipo (x-a).

Procedimiento: $(6x^3 - 13x + 5) : (x - 2)$

1. Se hace una caja y se colocan los coeficientes del dividendo en horizontal (si falta alguna se pone un cero).
2. Debajo y a la izquierda se coloca "a".
3. Se baja el primer coeficiente del dividendo.
4. Multiplicamos este por a y lo ponemos debajo del segundo coeficiente.
5. Los sumamos y repetimos el proceso hasta el final.

El último número es el resto, y los otros los coeficientes del cociente.

Coeficientes: 6, 0, -13 y 5

a=2.

Bajamos el 6.

6·2=12; 0+12=12

2·12=24; -13+24=11

2·11=22; 5+22=27

Resto 27

$C(x) = 6x^2 + 12x + 11$

	6	0	-13	5
2	↓	12	24	22
	6	12	11	27

Nota: Si se divide por (x-a) se pone en la caja "a", pero si se divide por (x+a) se pone el la caja "-a". Es decir, lo cambiamos de signo.

3.6. TEOREMA DEL RESTO

Teorema: El resto que se obtiene al dividir el polinomio $P(x)$ entre $(x-a)$ es igual al valor numérico del polinomio para $x = a \quad [P(a)]$

Demostración: $P(x) = C(x)\cdot(x-a) + R \qquad P(a) = C(a)\cdot(a-a) + R = C(a)\cdot 0 + R = R$

En el ejemplo anterior: $P(2) = 6\cdot 2^3 - 13\cdot 2 + 5 = 6\cdot 8 - 26 + 5 = 48 - 26 + 5 = 27$, que como nos dice el teorema del resto coincide con el resto de la división.

3.7. RAÍCES DE UN POLINOMIO

Definición: $x = a$ es raíz del polinomio $P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$.

A partir del teorema del resto: $x = a$ es raíz del polinomio $P(x) \Leftrightarrow P(x) : (x-a)$ es exacta.

Es decir $x = a$ es raíz del polinomio $P(x) \Leftrightarrow P(x) = (x-a)\cdot C(x)$

Teorema Fundamental del Álgebra:

Todo polinomio de grado "n" admite como máximo "n" raíces (siempre van de dos en dos).

Raíces simples: Si todas las raíces son distintas

Raíces dobles: Si tiene dos raíces iguales. Raíces múltiples: Si tiene más de dos raíces iguales.

Cálculo de raíces enteras de un polinomio:

a) Con término independiente: Las posibles raíces son los divisores del término independiente (lo comprobamos por Ruffini).

$x^3+3x^2-4x-12$ Divisores de 12= $\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12\}$

	1	3	-4	-12
1	↓	1	4	0
	1	4	1	|-12

1 no es raíz

	1	3	-4	-12
2	↓	2	10	12
	1	5	6	|0
-2	↓	-2	-6	
	1	3	|0	
-3	↓	-3		
	1	|0		

Las raíces son 2, -2 y -3

x^4-10x^2+9 $D(9)=\{\pm1,\pm3,\pm9\}$

	1	0	-10	0	9
1	↓	1	1	-9	-9
	1	1	-9	-9	|0
-1	↓	-1	0	9	
	1	0	-9	|0	
3	↓	3	9		
	1	3	|0		
-3	↓	-3			
	1	|0			

Raíces 1,-1,3 y -3

x^2-6x+9 $D(9)=\{\pm1,\pm3,\pm9\}$

	1	-6	9
3	↓	3	-9
	1	-3	|0
3	↓	3	
	1	|0	

Raíces: 3 doble

b) Cuando no tiene término independiente: Sacamos factor común "x" elevado al menor exponente. Corresponderá a la raíz 0 de orden ese exponente.

$x^3-5x^2+6x=x\cdot(x^2-5x+6)$

Una raíz será 0 (x)

	1	-5	6
2	↓	2	-6
	1	-3	|0
3	↓	3	
	1	|0	

Raíces $\begin{cases}0\\2\\3\end{cases}$

$x^4-4x^2=x^2\cdot(x^2-4)$ Una raíz será 0 y doble (x^2)

	1	0	-4
2	↓	2	4
	1	2	|0
-2	↓	-2	
	1	|0	

Raíces $\begin{cases}0 \text{ doble}\\2\\-2\end{cases}$

3.8. DESCOMPOSICIÓN DE UN POLINOMIO

Teorema de Descomposición:

Un polinomio $P(x)$ de grado n, que admite n raíces $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n$ y cuyo coeficiente principal es "a" admite una descomposición de la siguiente forma: $P(x)=a\cdot(x-r_1)\cdot(x-r_2)\cdot\ldots\ldots\cdot(x-r_n)$

$P(x)=2x^2-10x+12$

D(12)= $\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12\}$

	2	-10	12
2	↓	4	-12
	2	-6	|0
3	↓	6	
	2	|0	

Raíces $\begin{cases}2 & \text{Coeficiente}\\3 & \text{principal}\end{cases}$ 2

$P(x)=2\cdot(x-2)\cdot(x-3)$

$P(x)=x^3-1$ D(-1)= $\{\pm1\}$

	1	0	0	-1
1	↓	1	1	1
	1	1	1	|0
1	↓	1	2	← NO
	1	2	|3	

	1	1	1
-1	↓	-1	0
	1	0	|1

NO es raíz

$x^3-1\begin{cases}\text{raíces } 1\\ \text{polinomio irreducible } x^2+x+1\end{cases}$

$P(x)=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$

$P(x)=x^4-1$ D(-1)= $\{\pm1\}$

$P(x)=x^3+3x^2-4x-12$

D(12)= $\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12\}$

Las raíces son 2, -2 y 3

$\begin{array}{r\|cccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & \downarrow & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & \underline{\vert 0} \\ \underline{1} & & \downarrow & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & \underline{\vert} \end{array}$ NO $\quad \begin{array}{r\|cccc} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & \downarrow & -1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & \underline{\vert} \\ \underline{-1} & & \downarrow & -1 & 1 & \leftarrow NO \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \underline{\vert} \end{array}$ $x^4 - 1 \begin{cases} raíces\ 1, -1 \\ \text{polinomio irreducible } x^2+1 \end{cases}$ $P(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$	$P(x) = (x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$
	$P(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ $D(9) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$ Raíces 1,-1,3 y -3 $P(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-3)\cdot(x+3)$
	$P(x) = x^2 - 6x + 9$ $D(9) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$ Raíces: 3 doble $P(x) = (x-3)\cdot(x-3) = (x-3)^2$
$P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x = x\cdot(x^2 - 5x + 6)$ Las raíces son 0, 2 y 3 $P(x) = x\cdot(x-2)\cdot(x-3)$	$P(x) = x^4 - 4x^2 = x^2\cdot(x^2 - 4)$ Las raíces son 0 (doble), 2 y -2 $P(x) = x^2\cdot(x-2)\cdot(x+2)$

Máximo Común Divisor: Una vez descompuestos los polinomios se cogen los factores comunes con menor exponente.
Mínimo Común Múltiplo: Una vez descompuestos los polinomios se cogen los factores comunes y no comunes con mayor exponente.

4. FRACCIONES ALGEBRAICAS

Definición: Se llama fracción algebraica a una expresión matemática del $\frac{P(x)}{Q(x)}$; siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios y $Q(x) \neq 0$ (distinto del polinomio nulo). Ejemplos: $\frac{x^2-1}{x+3}; \frac{1}{x^2-1}; \frac{x^3-6x+2}{108}$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS:
Descomponer el numerador y el denominador en factores y simplificamos los iguales.
Ejemplos:

A. $\frac{x^3-1}{x^3+x^2+x} = \frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{x\cdot(x^2+x+1)} = \frac{x-1}{x}$

$x^3 - 1 \longrightarrow \begin{array}{r\|cccc} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \underline{1} & & \downarrow & 1 & 4 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \underline{\vert 0} \end{array}$ raíz 1, Pol. irreducible x^2+x+1 $\quad x^3 - 1 = (x-1)\cdot(x^2+x+1)$

$x^3 + x^2 + x = x\cdot(x^2+x+1)$ raíz 0 Pol. irreducible x^2+x+1

B. $\frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+3x^2+2x} = \frac{x\cdot(x+2)\cdot(x+3)}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)} = \frac{x+3}{x+1}$

$x^3 + 5x^2 + 6x = x\cdot(x^2+5x+6) = x\cdot(x+2)\cdot(x+3)$
raíces $0, -2, -3$

$\begin{array}{r\|ccc} & 1 & 5 & 6 \\ -2 & & \downarrow & -2 & -6 \\ \hline & 1 & 3 & \underline{\vert 0} \\ \underline{-3} & & \downarrow & -3 \\ \hline & 1 & \underline{\vert 0} \end{array}$

$x^3 + 3x^2 + 2x = x\cdot(x^2+3x+2) = x\cdot(x+1)\cdot(x+2)$
raíces $0, -1, -2$

$\begin{array}{r\|ccc} & 1 & 3 & 2 \\ -1 & & \downarrow & -1 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & \underline{\vert 0} \\ \underline{-2} & & \downarrow & -2 \\ \hline & 1 & \underline{\vert 0} \end{array}$

FRACCIÓN ALGEBRAICA IRREDUCIBLE: Es aquella que no se puede simplificar más.

FRACCIONES ALGEBRAICAS EQUIVALENTES:

Dos fracciones algebraicas son equivalentes si al simplificarse dan la misma fracción irreducible, o si al multiplicarlas en cruz da lo mismo:

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ es equivalente a $\frac{M(x)}{N(x)} \Longleftrightarrow P(x)\cdot N(x)=Q(x)\cdot M(x)$

Para obtener fracciones equivalentes se multiplica el numerador y el denominador por un mismo polinomio.

Ejemplo: $\frac{x-1}{x-3}\xrightarrow{\cdot(x+1)}\frac{x^2-1}{x^2-2x-3}$

REDUCCIÓN A COMÚN DENOMINADOR:

Pasos a seguir:

1. Hallar el M.C.M. de los denominadores.
2. Dividir el nuevo denominador por el antiguo y multiplicar por el numerador:

Ejemplo; $\frac{x}{x-1};\frac{3}{x^2-1};\frac{x+1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} x-1=x-1 \\ x^2-1=(x-1)\cdot(x+1) \\ x=x \end{array}\right\} MCM = x\cdot(x-1)\cdot(x+1)$$

$$\frac{x\cdot x\cdot(x+1)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)};\frac{3x}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)};\frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$$

$$\frac{x^3+x^2}{x^3-x};\qquad \frac{3x}{x^3-x};\qquad \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3-x}$$

OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

SUMA Y RESTA: Casos

1. Si tienen igual denominador se suman o restan los numeradores.
2. Si tienen distinto denominador se reducen a común denominador y se tiene el primer caso

Ejemplos:

a) $\frac{1}{x^2-1}+\frac{x}{x^2-1}=\frac{x+1}{x^2-1}(*)=\frac{x+1}{(x+1)\cdot(x-1)}=\boxed{\frac{1}{x-1}}$ * OJO!!! Simplifica y triunfarás

b) $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}-\frac{x+3}{x^2+9}=\frac{1\cdot(x+3)+1\cdot(x-3)-(x+3)}{(x+3)\cdot(x-3)}=\frac{x+3+x-3-x-3}{(x+3)\cdot(x-3)}=\frac{x-3}{(x+3)\cdot(x-3)}=\boxed{\frac{1}{x+3}}$

$x-3=x-3 \quad x+3=x+3 \quad x^2-9=(x+3)\cdot(x-3) \quad MCM=(x+3)\cdot(x-3)$

MULTIPLICACIÓN $\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)\cdot R(x)}{Q(x)\cdot S(x)}$

Como siempre hay que simplificar pero no vamos a operar hasta el final, antes descomponemos y simplificamos.

$$\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}\cdot\frac{x^2-1}{x^2+3x}=\frac{(x^2-9)\cdot(x^2-1)}{(x^2-4x+3)\cdot(x^2+3x)}=\frac{(x-3)\cdot(x+3)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x-3)\cdot x\cdot(x+3)}=\boxed{\frac{x+1}{x}}$$

DIVISIÓN $\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)\cdot S(x)}{Q(x)\cdot R(x)}$

Como siempre hay que simplificar pero no vamos a operar hasta el final, antes descomponemos y simplificamos.

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}\cdot\frac{x+1}{x^2-x}=\frac{(x^2-1)\cdot(x^2-x)}{(x^2-2x+1)\cdot(x+1)}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)\cdot x\cdot(x-1)}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{x}{1}=x$$

UNIDAD 5. *ECUACIONES DE PRIMER Y 2º GRADO. ECUACIONES MAYOR DE 2º GRADO*

5.1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO
5.2. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO (COMPLETA E INCOMPLETAS)
5.3. ECUACIONES DE GRADO MAYOR QUE DOS
5.4. ECUACIONES CON PRODUCTO DE FACTORES IGUAL A 0.

5.1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Las ecuaciones de primer grado son aquellas en la que interviene polinomios de primer grado. Mediante transformaciones de ecuaciones equivalentes debemos llegar a una expresión del tipo $ax=b$, donde a y b son números.

Discusión: $ax=b$

$a\neq 0$ se dice que la ecuación es compatible determinada E.C.D. (tiene solución y es única) $x=\frac{b}{a}$

$a=0\begin{cases} b=0 \text{ es compatible indeterminada E.C.I. (tiene infinitas soluciones) Sale expresión cierta } 0=0 \\ b\neq 0 \text{ es incompatible E.I. (no tiene solución) Sale una igualdad falsa } 0=b \end{cases}$

Resolución general de ecuaciones de primer grado.

PASOS A SEGUIR	$\frac{x-1}{2}+\frac{3x+2}{5}=x$
1. Quitar denominadores: hallar el m.c.m. de los denominadores y reducir a común denominador. 2. Eliminar paréntesis (normalmente hacer las multiplicaciones) 3. Trasponer términos (pasar la incógnita a un lado y los números al otro) y operar. 4. Discutir. 5. Resolver	m.c.m. (2,5,1)=10 $\frac{5\cdot(x-1)}{10}+\frac{2\cdot(3x+2)}{10}=\frac{10x}{10}$ $5x-5+6x+4=10x$ $5x+6x-10x=5-4$ $1x=1 \rightarrow$ E.C.D. $x=\frac{1}{1}=1$

5.2. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO (COMPLETA E INCOMPLETAS)

Definición: Una ecuación de segundo grado es aquella que equivalente a una del tipo $ax^2+bx+c=0$ donde a, b y c son números y a distinto de cero.

Se llama **completa** si todos los coeficientes a, b y c son distintos de cero. Se llama **incompleta** si alguno de ellos (b o c) es igual a cero.

Resolución:

Completa: Las soluciones se averiguan sustituyendo los coeficientes en la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

Incompletas:

b=0 $ax^2+c=0$ Resolvemos como ecuación de primer grado. $ax^2=-c\rightarrow x^2=\frac{-c}{a}$ Haciendo la raíz cuadrada $x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Tendrá solución cuando $\frac{-c}{a}$ sea positivo.

c=0 $ax^2+bx=0$ Sacamos factor común $x\rightarrow$ $x\cdot(ax+b)=0$. Aplicamos la propiedad de los números que nos dice que si el resultado de multiplicar dos números es 0, entonces uno de ellos es 0.

$\begin{cases} x=0 \\ ax+b=0\rightarrow ax=-b\rightarrow x=\frac{-b}{a} \end{cases}$

Ejemplos: $2x^2-50=0\rightarrow 2x^2=50\rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{50}{2}}\rightarrow x=\pm\sqrt{25}\begin{cases} x=+5 \\ x=-5 \end{cases}$

⇨ $x^2-5x+6=0$ es completa.

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\begin{cases}x_1=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=\boxed{3}\\ x_2=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=\boxed{2}\end{cases}$$

⇨ $7x^2+14x=0\rightarrow x\cdot(7x+14)=0\begin{cases}x=0\\ 7x+14=0\rightarrow7x=-14\rightarrow x=\frac{-14}{7}\rightarrow\boxed{x=-2}\end{cases}$

Discusión: Se llama discriminante al número que hay dentro de la raíz: $\boxed{\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c}$. Dependiendo de su valor obtendremos el número de soluciones.

- $\Delta>0$ (positivo). Tendrá dos soluciones distintas. E.C.D.
- $\Delta=0$. Tendrá una única solución (doble). E.C.D.
- $\Delta<0$ No tendrá solución. E.I.

Ejemplos: $2x^2-10x+12=0\rightarrow\Delta=(-10)^2-4\cdot2\cdot12=100-96=4>0$ Dos soluciones.

$5x^2+10x+5=0\rightarrow\Delta=10^2-4\cdot5\cdot5=100-100=0$ Una solución doble.

$-7x^2+6x-5=0\rightarrow\Delta=6^2-4\cdot(-7)\cdot(-5)=36-140=-104<0$.Sin solución. E.I.

Curiosidades:

La suma de las soluciones es igual a $s=\frac{-b}{a}$, y el producto de las soluciones es $p=\frac{c}{a}$

Ecuaciones de segundo grado

CASO 1. Si $b=0$ y $c=0\rightarrow ax^2=0$
Solución única, $\boxed{x=0}$

CASO 2. Si $c=0\rightarrow ax^2+bx=0$
Dos soluciones, $\boxed{x=0}$ y $\boxed{x=\frac{-b}{a}}$

CASO 3. Si $b=0\rightarrow ax^2+c=0$
- Si $-\frac{c}{a}>0$, dos soluciones, $\boxed{x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}}$
- Si $-\frac{c}{a}<0$, no tiene solución.

CASO 4. Si $a\neq0$ y $b\neq0\rightarrow ax^2+bx+c=0$ $c\neq0$

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$\Delta=$ Discriminante $=b^2-4ac$
- Si $\Delta>0$, tiene dos soluciones.
- Si $\Delta<0$, no hay solución.
- Si $\Delta=0$, tiene una solución.

5.3. ECUACIONES DE GRADO MAYOR QUE DOS

Se resuelve buscando las raíces del polinomio por Ruffini. *P(x)* = 0. Sólo podremos hallar las soluciones que sean enteras.

5.4. ECUACIONES CON PRODUCTO DE FACTORES IGUAL A 0.

$(\ )\cdot(\ )\cdot(\ )\cdot\ldots\ldots\cdot(\ )=0$ Para resolverlas igualamos cada factor a cero y resolvemos esa ecuación.

Ejemplo:

$$(x^2-5x+6)(3x+2)(2x-8)=0\begin{cases}x^2-5x+6=0\begin{cases}x=2\\ x=3\end{cases}\\ 3x+2=0\rightarrow x=\frac{-2}{3}\\ 2x-8=0\rightarrow x=4\end{cases}$$

UNIDAD 6. *ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO*

6.1. ECUACIONES BICUADRADAS
6.2. ECUACIONES RACIONALES (CON FRACCIONES ALGEBRAICAS)
6.3. ECUACIONES IRRACIONALES (CON RADICALES)
6.4. ECUACIONES LOGARÍTMICAS
6.5. ECUACIONES EXPONENCIALES

6.1. ECUACIONES BICUADRADAS

Son aquellas que responden a la ecuación $\boxed{ax^4+bx^2+c=0}$. Se resuelven haciendo un cambio de variable: Llamamos al **ZORRO** $\boxed{z=x^2}$, entonces $z^2=\left(x^2\right)^2=x^4$. Con lo que quedaría una ecuación de segundo grado en z. $az^2+bz+c=0$. Que sabemos resolverla. Una vez obtenidos los valores de z, obtenemos los de x haciendo la raíz cuadrada.

Ejemplo: $x^4-5x^2-36=0;\rightarrow z=x^2\rightarrow z^2-5z-36=0\rightarrow z=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot(-36)}}{2\cdot1}=$

$$=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{5\pm13}{2}\begin{cases}\dfrac{5+13}{2}=9\rightarrow x=\pm\sqrt{9}\begin{cases}x=3\\x=-3\end{cases}\\[2ex]\dfrac{5-13}{2}=-4\rightarrow x=\pm\sqrt{-4}\ \text{No existe}\end{cases}$$

Las $\boxed{\text{ecuaciones bicúbicas } (ax^6+bx^3+c=0)}$ se resuelven haciendo el cambio $\boxed{z=x^3}$ y haciendo raíz cúbica.

6.2. ECUACIONES RACIONALES (CON FRACCIONES ALGEBRAICAS)

Se resuelve reduciendo a común denominador y resolviendo la ecuación.

¡OJO! Podemos introducir soluciones no correctas. Hay que comprobar las soluciones en la ecuación inicial.

Ejemplo: $\dfrac{4x}{x-4}+x-4=\dfrac{16}{x-4}$ $\quad m.c.m=x\text{-}4;\quad \dfrac{4x}{x-4}+\dfrac{(x-4)\cdot(x-4)}{x-4}=\dfrac{16}{x-4}$

$$4x+x^2+16-8x=16;\qquad x^2-4x=0;\quad x\cdot(x-4)=0\quad\begin{cases}x=0\\x=4\end{cases}$$

Comprobar: $\boxed{x=0}$ $\quad\dfrac{4\cdot0}{0-4}+0-4=\dfrac{16}{0-4}\rightarrow0-4=\dfrac{16}{-4}\rightarrow-4=-4$ Correcto.

Solución $\boxed{x=0}$ es válida

$\boxed{x=4}$ $\quad\dfrac{4\cdot4}{4-4}+4-4=\dfrac{16}{4-4}\rightarrow\dfrac{16}{0}+0=\dfrac{16}{0}$ No es correcto (no se puede dividir por 0)

Solución incorrecta

6.3. ECUACIONES IRRACIONALES (CON RADICALES)

Las ecuaciones irracionales son aquellas en las que las incógnitas aparece bajo el signo radical.

PASOS A SEGUIR $\sqrt{x+11}+1=x$

1. Aislar la raíz. $\sqrt{x+11}=x-1$
2. Elevar al cuadrado los dos términos $\left(\sqrt{x+11}\right)^2=(x-1)^2$
3. Resolver $x+11=x^2+1-2x$; $0=x^2-3x-10$; $x=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{3\pm 7}{2}\begin{cases}5\\-2\end{cases}$
4. Comprobar las soluciones. $x=5\Rightarrow\sqrt{5+11}+1=5\Rightarrow\sqrt{16}+1=5\Rightarrow 4+1=5$ Correcta

   $x=-2\Rightarrow\sqrt{-2+11}+1=-2\Rightarrow\sqrt{9}+1=-2\Rightarrow 3+1=-2$ Incorrecta

Nota: Siempre hay que comprobar las soluciones ya que al elevar al cuadrado podemos introducir soluciones no correctas.

6.4. ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Son aquellas en las que la incógnita aparece sometida a la operación logaritmo. Para resolverlas utilizaremos las propiedades de los logaritmos y la propiedad $\boxed{\log A=\log B\Leftrightarrow A=B}$

Ejemplo: $\log x^3=\log 6+2\log x\rightarrow 3\log x-2\log x=\log 6\rightarrow \log x=\log 6\rightarrow \boxed{x=6}$

6.5. ECUACIONES EXPONENCIALES

Son aquellas en las que la incógnita aparece en el exponente. Se resuelven normalmente por igualaci´n de exponente, por cambio de variable o por aplicación de logaritmos.

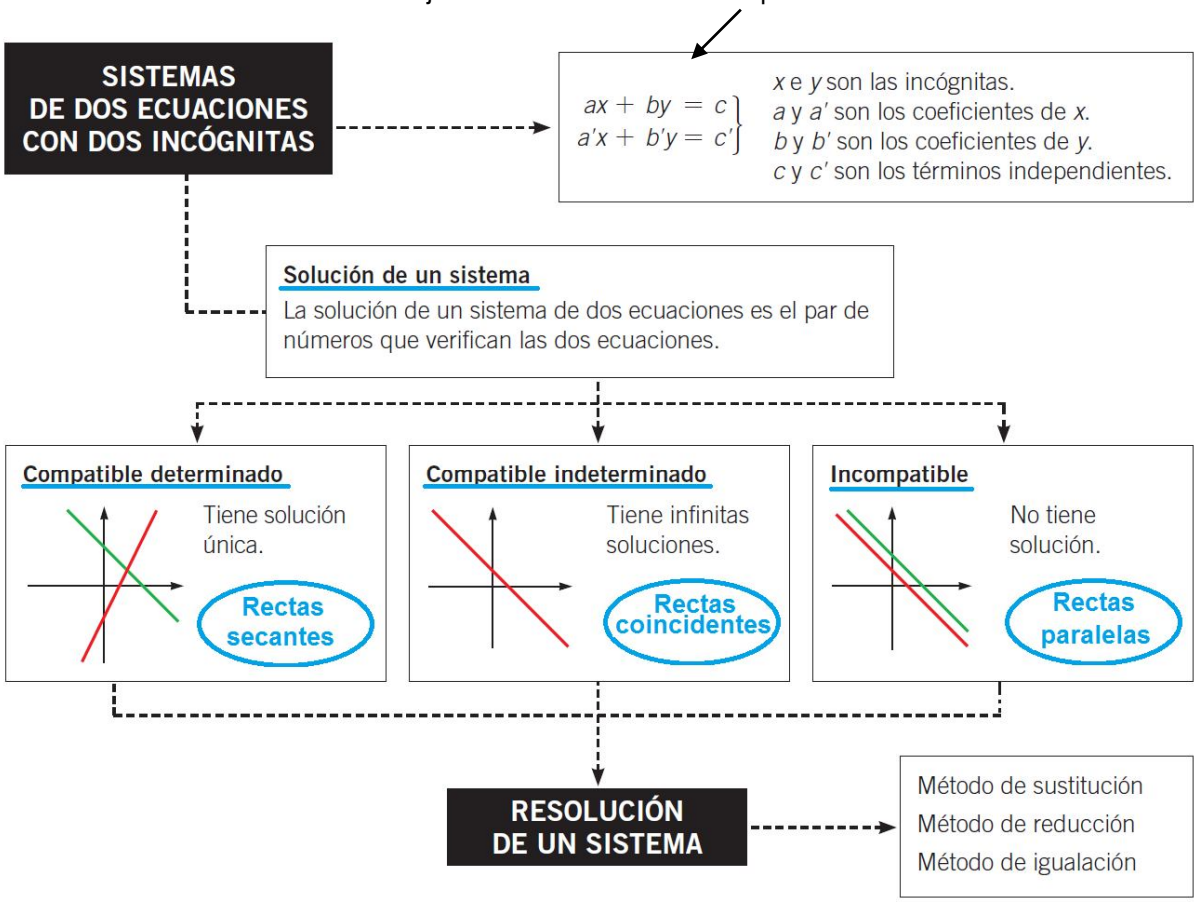
Ejemplo: $2^{x-1}=8\rightarrow 2^{x-1}=2^3\rightarrow x-1=3\rightarrow \boxed{x=4}$

UNIDAD 7. *SISTEMA DE ECUACIONES*

7.1. SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS
7.2. DISCUSIÓN DE LOS SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS
7.3 SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

7.1. SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Un sistema de ecuaciones en un conjunto de ecuaciones de este tipo.



Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones:

Se basan en transformaciones elementales de las ecuaciones. Es decir en transformarlos en otros equivalentes. Todos los métodos los vamos a ejemplificar con este sistema. $\left.\begin{matrix}3x-5y=1\\2x+3y=7\end{matrix}\right\}$. Siempre hay que comprobar la solución.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN:

1. **Despejamos** una de las incógnitas en una de las ecuaciones (la que queramos y resulte más sencilla)	x en la 1º ecuación $3x = 1+5y \rightarrow x = \dfrac{1+5y}{3}$
2. **Sustituimos** la expresión obtenida en la otra ecuación	$2\left(\dfrac{1+5y}{3}\right)+3y=7$
3. **Resolvemos** la ecuación obtenida (sacamos el valor de una incógnita)	$\dfrac{2+10y}{3}+\dfrac{9y}{3}=\dfrac{21}{3} \rightarrow 10y+9y=21-2 \rightarrow 19y=19 \rightarrow y=1$
4. **Obtenemos** el valor de la otra incógnita en el paso 1.	$x=\dfrac{1+5\cdot 1}{3} \rightarrow x=\dfrac{1+5}{3} \rightarrow x=\dfrac{6}{3} \rightarrow x=2$ Solución: $\boxed{\begin{matrix}x=2\\y=1\end{matrix}}$

MÉTODO DE IGUALACIÓN

1. **Despejamos** una de las incógnitas en las dos ecuaciones (la que queramos y resulte más sencilla)	x $1^a \rightarrow 3x = 1+5y \rightarrow$ $x = \dfrac{1+5y}{3}$ $2^a \rightarrow 2x = 7-3y \rightarrow$ $x = \dfrac{7-3y}{2}$
2. **Igualamos** las expresiones obtenidas en el paso 1.	$\dfrac{1+5y}{3} = \dfrac{7-3y}{2}$
3. **Resolvemos** la ecuación obtenida (sacamos el valor de una incógnita)	$\dfrac{2(1+5y)}{6} = \dfrac{3(7-3y)}{6} \rightarrow 2+10y = 21-9y \rightarrow 10y+9y = 21-2$ $\rightarrow 19y = 19 \rightarrow y = 1$
4. **Obtenemos** el valor de la otra incógnita en el paso 1.	$x = \dfrac{1+5\cdot 1}{3} \rightarrow x = \dfrac{1+5}{3} \rightarrow x = \dfrac{6}{3} \rightarrow x = 2$ Solución: $\boxed{\begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}}$

MÉTODO DE REDUCCIÓN

El objetivo es eliminar una de las ecuaciones, para ello debemos conseguir que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente (pero con distinto signo) en las dos ecuaciones, para después sumarlas y que desaparezca esa incógnita.

1. Se **igualan coeficientes** de una incógnita (signo opuesto) multiplicando una o las dos ecuaciones por números convenientes.	$\left.\begin{matrix} 3x-5y=1 \\ 2x+3y=7 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 5 \end{matrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} 9x-15y=3 \\ 10x+15y=35 \end{matrix}\right\}$
2. Sumamos las dos ecuaciones, obteniendo una muy sencilla de primer grado con una incógnita. Es decir se **reduce** el sistema a una ecuación	$\left.\begin{matrix} 9x-15y=3 \\ 10x+15y=35 \end{matrix}\right\}$ $19x \quad = 38$
3. **Resolvemos** la ecuación	$19x = 38 \rightarrow x = \dfrac{38}{19} \rightarrow x = 2$
4. **Obtenemos** el valor de la otra incógnita sustituyendo en una de las ecuaciones del sistema	$3\cdot 2 - 5y = 1 \rightarrow -5y = 1-6 \rightarrow y = \dfrac{-5}{-5} \rightarrow y = 1$ Solución: $\boxed{\begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}}$

7.2. DISCUSIÓN DE LOS SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

En este apartado queremos saber si el sistema tiene o no solución sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones.

Los **SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**, se clasifican dependiendo del número de soluciones.

Relación entre coeficientes	Número de soluciones	Nombre
$\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$	Una solución	Sistema Compatible Determinado (**S.C.D.**)
$\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$	Infinitas soluciones	Sistema Compatible Indeterminado (**S.C.I.**)
$\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$	Sin solución	Sistema Incompatible (**S.I.**)

Ejemplos:

$\left.\begin{matrix} 3x-5y=1 \\ 2x+3y=7 \end{matrix}\right\}$ $\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{-5}{3}$ S.C.D	$\left.\begin{matrix} x-3y=5 \\ -2x+6y=-10 \end{matrix}\right\}$ $\dfrac{1}{-2} = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{5}{-10}$ S.C.I.	$\left.\begin{matrix} x-3y=5 \\ -2x+6y=4 \end{matrix}\right\}$ $\dfrac{1}{-2} = \dfrac{-3}{6} \neq \dfrac{5}{4}$ S.I.

7.3. SISTEMAS DE TRES ECUACIONES CON TRES INCÓGNITAS. MÉTODO DE GAUSS

Explicado en el Cuaderno de Ejercicios

UNIDAD 8. *SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES*

Salvo casos muy claros, que están preparados el método a seguir es el de **Sustitución** (OJO!! Si es posible despejar siempre en la ecuación lineal, si la hay): Además hay que comprobar siempre las soluciones.

Ejemplos:

- $\left.\begin{matrix} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{matrix}\right\} \rightarrow x=y+1 \rightarrow (y+1)^2+y^2=5 \rightarrow y^2+1+2y+y^2=5 \rightarrow 2y^2+2y-4=0 \rightarrow y^2+y-2=0$

$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}\begin{cases} y=1 \rightarrow x=1+1=2 \\ y=-2 \rightarrow x=-2+1=-1 \end{cases}$ Soluciones: $\boxed{\begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} x=-1 \\ y=-2 \end{matrix}}$ Son las dos correctas.

- $\left.\begin{matrix} x+y=2 \\ \sqrt{x+3}=2y \end{matrix}\right\} \rightarrow x=2-y \rightarrow \sqrt{2-y+3}=2y \rightarrow \sqrt{5-y}=2y \rightarrow \left(\sqrt{5-y}\right)^2=(2y)^2 \rightarrow 5-2y=4y^2$

$4y^2+y-5=0 \rightarrow y=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+80}}{8}=\dfrac{-1\pm 9}{8}\begin{cases} y=1 \rightarrow x=2-1=1 \\ y=\dfrac{-10}{8}=\dfrac{-5}{4} \rightarrow x=2-\left(\dfrac{-5}{4}\right)=\dfrac{13}{4} \end{cases}$

Soluciones: $\boxed{x=1;\ y=1}$ Correcta $1+1=2;\ \sqrt{1+3}=2\cdot 1$

$\boxed{x=\dfrac{13}{4};\ y=\dfrac{-5}{4}}$ Incorrecta ya que $\sqrt{\dfrac{13}{4}+3}\neq 2\cdot\left(\dfrac{-5}{4}\right)$ (uno es positivo y el otro negativo)

Puestos claramente para utilizar otros métodos:

- $\left.\begin{matrix} x^2-y^2=5 \\ x^2+y^2=13 \end{matrix}\right\}$ Por **reducción** $\left.\begin{matrix} x^2-y^2=5 \\ x^2+y^2=13 \end{matrix}\right\}$

$2x^2=18$

$x^2=\dfrac{18}{2};\ x^2=9;\ x=\pm\sqrt{9};\begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$

Si $x=3;\ 9+y^2=13;\ y^2=4\begin{cases} y=2 \\ y=-2 \end{cases}$ si $x=-3;\ 9+y^2=13;\ y^2=4\begin{cases} y=2 \\ y=-2 \end{cases}$

Soluciones:

$x=3$	$x=3$	$x=-3$	$x=-3$
$y=2$	$y=-2$	$y=2$	$y=-2$

Soluciones todas correctas

- $\left.\begin{matrix} e=\dfrac{1}{2}t \\ e=\sqrt{t-2}+1 \end{matrix}\right\}$ Por Igualación $\dfrac{1}{2}t=\sqrt{t-2}+1 \rightarrow \left(\dfrac{1}{2}t-1\right)^2=\left(\sqrt{t-2}\right)^2 \rightarrow \dfrac{1}{4}t^2+1-t=t-2$

$t^2+4-4t=4t-8 \rightarrow t^2-8t+12=0 \rightarrow t=\dfrac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\dfrac{8\pm 4}{2}\begin{cases} t=6 \rightarrow e=3 \\ t=2 \rightarrow e=1 \end{cases}$

- $\left.\begin{matrix} 3^{x-1}-3^{-y}=\dfrac{2}{9} \\ 2x+y=2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} y=2-2x \\ 3^{x-1}-3^{-(2-2x)}=\dfrac{2}{9} \end{matrix}\right\} \rightarrow \dfrac{3^x}{3}-\dfrac{3^{2x}}{3^2}=\dfrac{2}{9}$ (cambio de variable $3^x=z$; $3^{2x}=\left(3^x\right)^2=z^2$)

$\dfrac{z}{3}-\dfrac{z^2}{9}=\dfrac{2}{9} \rightarrow \dfrac{3z}{9}-\dfrac{z^2}{9}=\dfrac{2}{9} \rightarrow -z^2+3z-2=0$ Soluciones $z=1 \rightarrow 3^x=1 \rightarrow x=0$; $z=2 \rightarrow 3^x=2 \rightarrow x=\log_3 2$

Soluciones:

$x=0$	$x=\log_3 2$
$y=2$	$y=2-2\log_3 2=\log_3\dfrac{9}{4}$

Soluciones todas correctas

Las dos soluciones son correctas.

UNIDAD 9. *INECUACIONES DE PRIMER Y 2º GRADO. SISTEMAS DE INECUACIONES*

9.1. INECUACIONES DE PRIMER GRADO

9.2. INECUACIONES DE GRADO MAYOR QUE UNO

9.3. INECUACIONES CON COCIENTES

9.4. SISTEMAS DE INECUACIONES

9.1. INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una ***inecuación*** es una ***desigualdad algebraica*** en la que aparece alguna *incógnita* en uno o en los dos miembros de la desigualdad.

Las inecuaciones de primer grado son inecuaciones con expresiones algebraicas, que después de realizar una serie de transformaciones elementales, nos queda de la forma ax(desigualdad)b. Las transformaciones se realizan aplicando las propiedades de las desigualdades.

Resolución: Se resuelven igual que las ecuaciones de primer grado, teniendo en cuenta que cuando se multiplica o se divide por un número negativo la desigualdad cambia de sentido.

Ejemplos:

$$\frac{2x-5}{5}-2x>\frac{3x+1}{4}-3x+\frac{7}{10}$$

$$\rightarrow (m.c.m=20);\frac{4\cdot(2x-5)}{20}-\frac{20\cdot 2x}{20}>\frac{5\cdot(3x+1)}{20}-\frac{20\cdot 3x}{20}+\frac{2\cdot 7}{20}$$

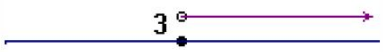
Fuera denominadores $\rightarrow 8x-20-40x>15x+5-60x+14$

Transponemos $8x-40x-15x+60x>20+5+14$

Agrupamos $\rightarrow 13x>39$

Como 13 es positivo la desigualdad no cambia $x>\frac{39}{13};x>3$

Solución: $x>3$. En intervalo $(3,+\infty)$. Gráficamente:



$2x+5\geq 5x-10\rightarrow 2x-5x\geq -5-10\rightarrow -3x\geq -15$ Como -3 la desigualdad cambia $x\leq\frac{-15}{-3}\rightarrow x\leq 5$

Solución: $x\leq 5$. Intervalo: $(-\infty,5]$. Gráficamente:

9.2. INECUACIONES DE GRADO MAYOR QUE UNO

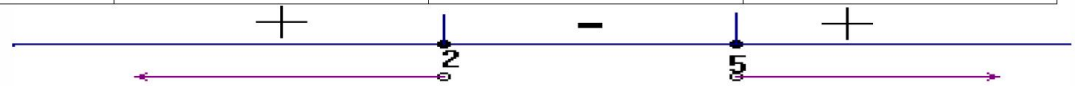
Resolución, pasos a seguir:

1. Hallar las raíces de la ecuación.
2. Dar valores entre las raíces para ver los signos.
3. Poner la solución en forma de intervalo.

Ejemplo: $x^2-7x+10>0$. Resolvemos $x^2-7x+10=0\rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm3}{2}=\begin{cases}5\\2\end{cases}$.

Estudiamos un valor en cada intervalo, por ejemplo en $(-\infty,2)$ estudiamos el 0 $\rightarrow 0^2-7\cdot0+10=10$ Positivo.

Intervalo	$(-\infty,2)$	$(2,5)$	$(5.+\infty)$
Punto del intervalo	0	3	6
Valor numérico	$0^2-7\cdot0+10=10$	$3^2-7\cdot3+10=-2$	$6^2-7\cdot6+10=4$



Como el ejercicio dice mayor que 0 (>0) y los mayores que 0 son los positivos, la solución son los intervalos dónde es positivo $\boxed{(-\infty,2)\cup(5,+\infty)}$ Los puntos 2 y 5 no están incluidos porque la desigualdad no incluye el igual a 0.

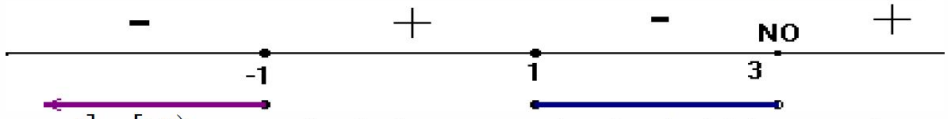
9.3. INECUACIONES CON COCIENTES

Resolución, pasos a seguir:

1. Hallar las raíces de la ecuación.
2. Dar valores entre las raíces para ver los signos.
3. Poner la solución en forma de intervalo. ¡!Cuidado!! las raíces del denominador no son soluciones válidas.

Ejemplo: $\frac{x^2-1}{x-3}\le0$. Resolvemos $\begin{matrix}x^2-1=0\rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm1\\x-3=0\rightarrow x=3\end{matrix}$. Estudiamos los signos. $\left(\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-3}\right)$

Intervalo	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3.+\infty)$
signo	$\frac{-\cdot-}{-}=-$	$\frac{-\cdot+}{-}=+$	$\frac{+\cdot+}{-}=-$	$\frac{+\cdot+}{+}=+$



Solución: $(-\infty,-1]\cup[1,3)$ 3 no está incluido porque es la solución del denominador.

9.4. SISTEMAS DE INECUACIONES

A) CON UNA INGOGNITA:

Se resuelven las inecuaciones por separado, y la solución del sistema es la intersección de las soluciones. Ejemplo:

$$\left.\begin{matrix}\frac{2x-5}{5}-2x>\frac{3x+1}{4}-3x+\frac{7}{10}\\x^2-7x+10\le0\end{matrix}\right\}\ \text{soluciones}\ \left.\begin{matrix}(3,+\infty)\\[2,5]\end{matrix}\right\}\ \text{Hacemos la intersección}\ (3,+\infty)\cap[2,5]=(3,5]$$

Gráficamente:

B) CON DOS INCOGNITAS:

Una inecuación con los incógnitas representa espacialmente un semiplano. Para representarla vamos a seguir los siguientes pasos.

1.Despejar "y" y dar valores y representar. (los olvidamos de la desigualdad, por ahora)

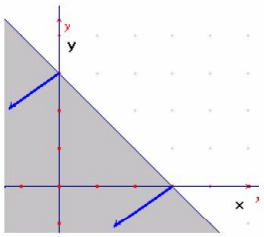
2.Tomar el punto (0,0) como referencia y comprobar si pertenece a la región (a veces hay que utilizar otro punto).

3.Pintar la región.

Ejemplo: $x + y \leq 3 \qquad y = 3 - x$

x	0	3
y	3	0

$0 + 0 \leq 3 \rightarrow \text{SI}$



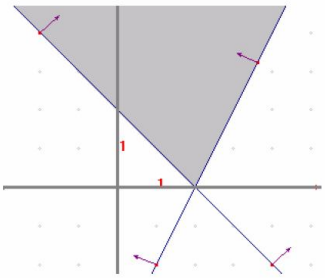
La solución de los sistemas de varias ecuaciones será la intersección de todas las regiones (se llama región factible)

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l}(r) 2x - y \leq 4 \\ (s) x + y \geq 2\end{array}\right\} \begin{array}{l}(r) y = 2x - 4 \\ (s) y = 2 - x\end{array}$

r	x	0	2
	y	-4	0
	x	0	2
	y	2	0

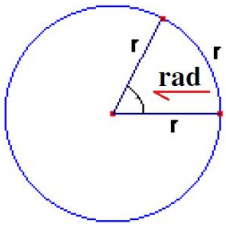
$2 \cdot 0 - 0 \leq 4 \rightarrow \text{SI}$

$0 + 0 \geq 2 \rightarrow \text{NO}$



UNIDAD 10 Y 11. *TRIGONOMETRÍA*

1. MEDIDAS DE ÁNGULOS



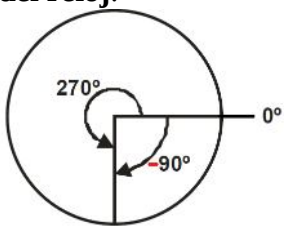
GRADOS: Un grado sexagesimal es el ángulo correspondiente a una de las 360 partes en que se divide el ángulo central de la circunferencia.(º)

RADIÁN: Un radián es la medida del ángulo central de la circunferencia cuyo arco coincide, en longitud, con el radio. (**rad**)

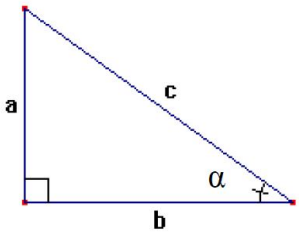
Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$ el ángulo de la circunferencia completa es 2π rad, que correspondería con 360º.

Grados	360º	180º	90º	60º	45º	30º	0º
Radianes	2π	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

ÁNGULOS NEGATIVOS: Un ángulo es **negativo** si se cuenta en el **sentido de las agujas del reloj** y es **positivo** si se cuenta en el **sentido contrario al de las agujas del reloj**.



2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO



a= cateto opuesto
b= cateto contiguo
c= hipotenusa

SENO

$$sen\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

COSECANTE

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} = \frac{c}{a}$$

COSENO

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

SECANTE

$$sec\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{b}$$

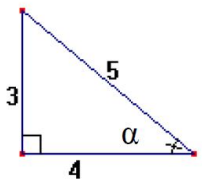
TANGENTE

$$tg\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{a}{b}$$

COTANGENTE

$$cotg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{b}{a}$$

Ejemplo: En el siguiente triángulo calculamos las razones trigonométricas del ángulo α:



$$sen\,\alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad tg\,\alpha = \frac{3}{4}$$

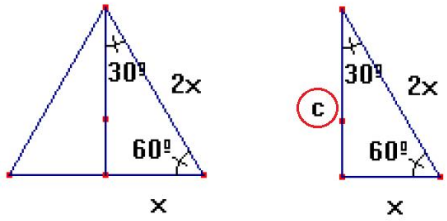
$$cosec\,\alpha = \frac{5}{3} \qquad sec\,\alpha = \frac{5}{4} \qquad cot\,g\,\alpha = \frac{4}{3}$$

3. USO DE LA CALCULADORA CIENTÍFICA

Para trabajar en grados la calculadora debe estar en MODE 4:DEG.; para los radianes en MODE 5:RAD.
Si queremos calcular alguna de las razones trigonométricas de un ángulo utilizamos las teclas ***sin*** para seno, ***cos*** para coseno y ***tan*** para tangente.
Ejemplo: sen 70º → pulsamos el ángulo y después ***sin*** → 7 0 ***sin*** aparece en la pantalla 0.93969262.
Si queremos calcular el ángulo sabiendo alguna razón trigonométrica utilizamos lo que llamamos razones trigonométricas inversas arco seno, arco coseno y arco tangente (debemos tener mucho cuidado al situar el ángulo)
Ejemplo: cos α=0.25 para calcular el ángulo α pulsamos el número y después la tecla SHIFT (inversa) y ***cos*** (con estas dos últimas teclas realizamos el arco coseno o como aparece en la calculadora cos^{-1} → 0 · 2 5 SHIFT ***cos*** aparece en la pantalla 75.52248781(º).

4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS 30º, 45º Y 60º

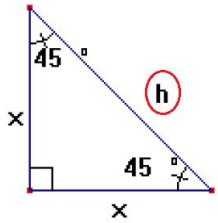
Ángulos de 30º y 60º: Cogemos un triángulo equilátero de lado $2x$, y trazamos la altura. Si nos quedamos con el triángulo pequeño nos quedará un triángulo rectángulo con los ángulos de 30º y 60º.
Aplicamos el Teorema de Pitágoras para hallar el cateto que nos falta "c": $c^2=(2x)^2-x^2;\rightarrow c=\sqrt{3x^2}\leftarrow \boxed{c=\sqrt{3}\,x}$



$$sen\ 30º=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2} \qquad \cos 30^o=\frac{\sqrt{3}\,x}{2x}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tg\ 30^o=\frac{x}{\sqrt{3}\,x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$sen\ 60^o=\frac{\sqrt{3}\,x}{2x}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 60º=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2} \qquad tg\ 60^o=\frac{\sqrt{3}\,x}{x}=\sqrt{3}$$

Ángulo de 45º: Cogemos un triángulo rectángulo isósceles de lado x. Calculamos el valor de la hipotenusa $h^2=x^2+x^2\rightarrow \boxed{h}=\sqrt{2x^2}=\boxed{\sqrt{2}\,x}$



$$sen\ 45º=\frac{x}{\sqrt{2}\,x}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45^o=\frac{x}{\sqrt{2}\,x}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\ 45^o=\frac{x}{x}=1$$

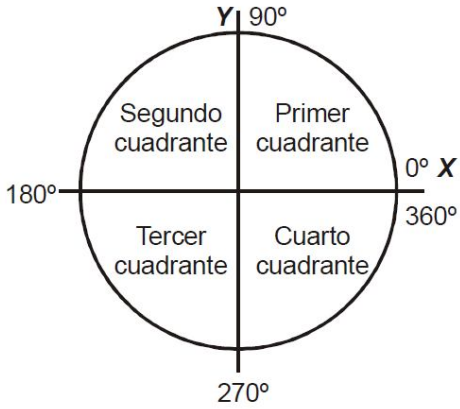
	0º	30º	45º	60º	90º
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	No existe

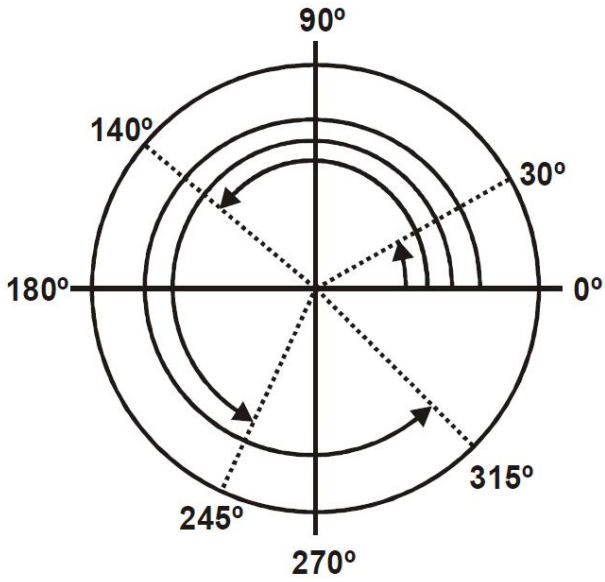
El seno equivale al eje Y, mientras que el coseno equivale al eje X.

5. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO.

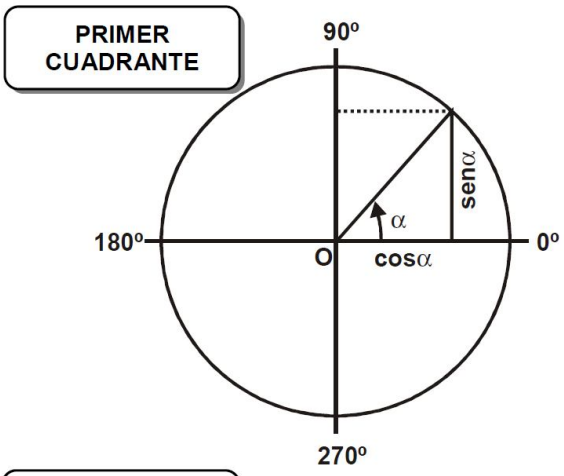
El cálculo de las razones trigonométricas sobre un triángulo rectángulo se simplifica bastante si consideramos que la hipotenusa tiene valor 1. Por esa razón, para representar

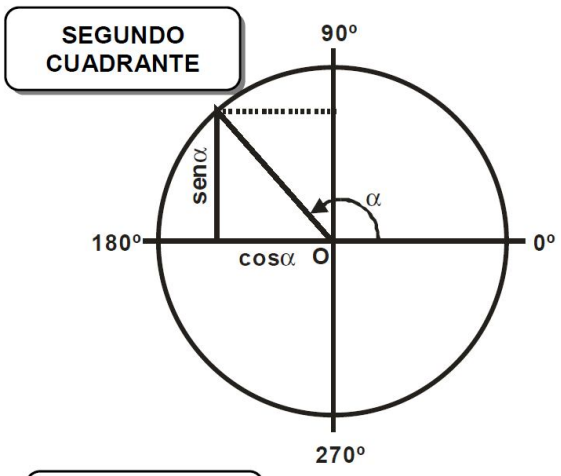
los ángulos se utiliza un sistema de coordenadas formado por los ejes X e Y, y una circunferencia de radio 1. Esta circunferencia recibe el nombre de ***circunferencia goniométrica***. Los ejes dividen a la circunferencia en **cuatro cuadrantes**.

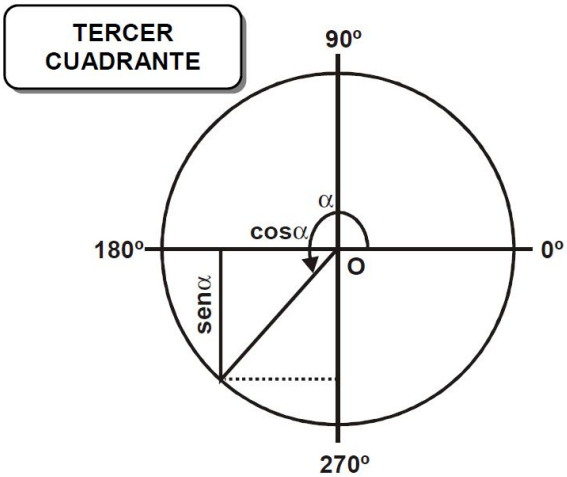


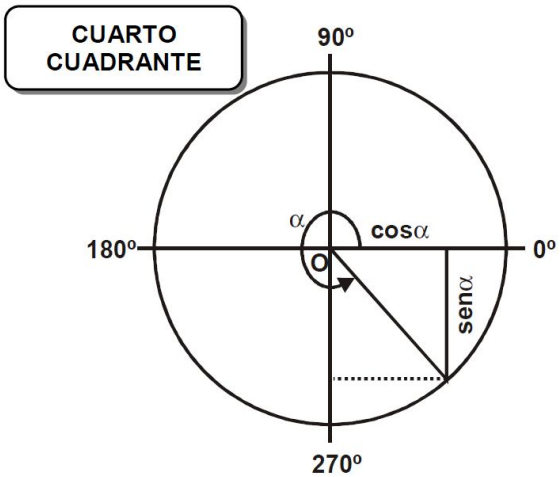


Este sistema de referencia nos permite además, determinar el signo del seno, coseno y tangente según el cuadrante que ocupe el ángulo en la circunferencia goniométrica. *El seno equivale al eje Y, mientras que el coseno equivale al eje X.*









Por lo tanto, el signo de las razones trigonométricas de un ángulo es:

	Cuadrante			
	1º	2º	3º	4º
Sen α	+	+	-	-
Cos α	+	-	-	+
Tg α	+	-	+	-

6. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS.

Ángulos opuestos α y – α

Las razones trigonométricas de dos ángulos opuestos α y – α cumplen que:

- $sen\,(-\alpha) = -sen\alpha$
- $cos(-\alpha) = cos\alpha$
- $tg(-\alpha) = -tg\alpha$

Ángulos que se diferencian en 180 grados

Las razones trigonométricas de dos ángulos que se diferencian en 180 grados, α y 180º + α, cumplen que:

- $sen(180º + \alpha) = -sen\alpha$
- $cos(180º + \alpha) = -cos\alpha$
- $tg(180º + \alpha) = tg\alpha$

Ángulos suplementarios (Suman 180º)

Las razones trigonométricas de dos ángulos suplementarios cumplen que:

- $sen(180º - \alpha) = sen\alpha$
- $cos(180º - \alpha) = -cos\alpha$
- $tg(180º - \alpha) = -tg\alpha$

7. FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

A. FÓRMULAS FUNDAMENTALES

Estas fórmulas las utilizaremos para cuando nos den una razón trigonométrica calcular las demás razones.

(1) $\boxed{tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}}$ **(2)** $\boxed{sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1}$ **(3)** $\boxed{1 + tg^2\ \alpha = \frac{1}{cos^2\ \alpha}}$

La fórmula (1) sale de la definición de seno, coseno y tangente y su comparación (o a través de la equivalencia de triángulos → Teorema de Thales).

La fórmula (2) sale de aplicar el Teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos (o la condición de que el punto esté en la circunferencia).

La formula (3) sale a partir de la (2) dividiendo por $\cos^2 \alpha$.

B. SUMA DE DOS ÁNGULOS	**C. DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS**
$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$	$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$ $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$
D. ÁNGULO DOBLE	**E. ÁNGULO MITAD**
$\operatorname{sen}(2\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$ $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$ $\operatorname{tg}(2\alpha)=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
F. SUMA Y DIFERENCIA DE SENOS	**G. SUMA Y DIFERENCIA DE COSENOS**
$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\cdot\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}$ $\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B=2\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}$	$\cos A+\cos B=2\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}$ $\cos A-\cos B=2\cdot\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}$

Ejemplos:

$$sen(75^\circ)=sen(30^\circ+45^\circ)=sen30^\circ\cdot\cos45^\circ+\cos30^\circ\cdot sen45^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\boxed{0'96}$$

$$\cos(15^\circ)=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos45^\circ\cdot\cos30^\circ+sen45^\circ\cdot sen30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\boxed{0'96}$$

$$sen(120^\circ)=sen(2\cdot60^\circ)=2sen60^\circ\cdot\cos60=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\operatorname{sen}15^\circ=\operatorname{sen}\left(\frac{30^\circ}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos30^\circ}{2}}=+\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\boxed{0'2588}$$

$$\operatorname{sen}75^\circ-\operatorname{sen}15^\circ=2\cdot\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=2\cdot\cos\frac{90^\circ}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{60^\circ}{2}=2\cdot\cos45\cdot\operatorname{sen}30=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cos75^\circ+\cos15^\circ=2\cdot\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cdot\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=2\cdot\cos\frac{90^\circ}{2}\cdot\cos\frac{60^\circ}{2}=2\cdot\cos45\cdot\cos30=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

$$\frac{sen4\alpha+sen2\alpha}{\cos4\alpha+\cos2\alpha}=\frac{2sen3\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos3\alpha\cdot\cos\alpha}=\boxed{tg3\alpha}$$ (Estas fórmulas se utilizan mucho en integrales)

8. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Definición: Son aquellas en las que la incógnita aparece con las razones trigonométricas.

Ideas fundamentales para resolverlas:

- Si hay razones trigonométricas de distintos ángulos (α, 2α, α/2, …), hay que escribirlas en función de un solo ángulo (mediante las fórmulas).

- Si aparecen varias razones trigonométricas es conveniente expresarlas en función de una, mediante las fórmulas fundamentales.

Ejemplos:

ⓐ $sen\,2x - sen\,x = 0$ (ponemos en función de x)

$2sen\,x\cdot\cos x - sen\,x = 0 \rightarrow$ (Sacamos factor común)

$$sen\,x(2\cdot\cos x - 1) = 0 \begin{cases} sen\,x = 0 \begin{cases} 0 + 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases} \\ 2\cos x = 1;\ \cos x = \frac{1}{2} \begin{cases} 60º + 2k\pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 300 + 2k\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

ⓑ $\cos 2x - sen^2 x - 1 = 0$ (ponemos en función de x)$\rightarrow$ $\cos^2 x - sen^2 x - sen^2 x - 1 = 0$ (ponemos en función de seno) $1 - sen^2 x - sen^2 x - sen^2 x - 1 = 0 \rightarrow -3sen^2 x = 0 \rightarrow$ $sen\,x = 0 \begin{cases} 0 + 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases}$

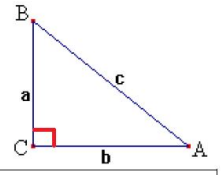
ⓒ $9sen^2 x - 3\cos\ x - 7 = 0$ (ponemos en función de coseno) $\rightarrow 9(1 - \cos^2 x) - 3\cos\ x - 7 = 0$

$9 - 9\cos^2 x - 3\cos\ x - 7 = 0 \rightarrow -9\cos^2 x - 3\cos\ x + 2 = 0$ Ecuación de 2º Grado

$$\cos\ x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{-18} = \frac{3 \pm 9}{-18} = \begin{cases} \frac{12}{-18} = \frac{-2}{3} \begin{cases} 180º - 48'2º + 2k\pi \\ 180º + 48'2º + 2k\pi \end{cases} \\ \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3} \begin{cases} 70'5º + 2k\pi \\ 360º - 70'5º + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

ⓓ $sen^2 x + sen\ x - 6 = 0 \rightarrow$ $sen\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$ Imposible!! Seno está entre -1 y 1

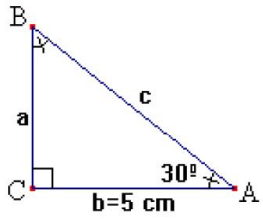
9. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS



Resolver un triángulo es encontrar los elementos que nos faltan (lados y ángulos).

Para resolverlo hay que utilizar las definiciones de seno, coseno y tangente, el teorema de Pitágoras y que la suma de los ángulos es 180.

Ejemplo: Resuelve el siguiente triángulo:



$\hat{B} = 180 - 90 - 30 = 60º$

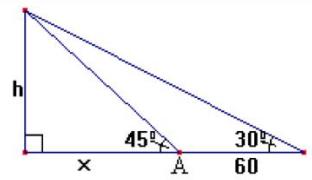
$\cos\ 30º = \frac{b}{c} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{c} \rightarrow c = \frac{10}{\sqrt{3}} \rightarrow$ $c = 5'77\ cm$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 = a^2 + 5^2 \rightarrow \frac{100}{3} - 25 = a^2 \rightarrow$

$a = \sqrt{\frac{25}{3}} \rightarrow a = \frac{5}{\sqrt{3}} =$ $2'88\ cm$

Ejemplo: Método de la doble observación.

Para calcular la altura de una montaña se hace una observación desde un punto A, desde el cuál vemos la cima de la misma bajo un ángulo de 45º. Alejándonos 60 m, observamos la cima bajo un ángulo de 30º. ¿Cuánto mide la altura de la montaña.



$$tg\,45=\frac{h}{x}\Rightarrow 1=\frac{h}{x}\rightarrow x=h \qquad tg\,30=\frac{h}{x+60}\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{h}{x+60}$$

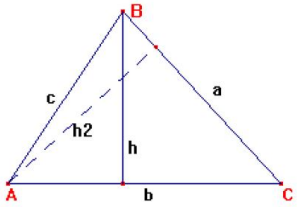
$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{h}{h+60}\rightarrow h+60=\sqrt{3}\cdot h \qquad h=\frac{60}{\sqrt{3}-1}=81'96m$$

10. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS

Para resolver triángulos no rectángulos empleamos los teoremas del seno y del coseno.

TEOREMA DEL SENO:

En cualquier triángulo se verifica: $\dfrac{a}{sen\,\hat{A}}=\dfrac{b}{sen\,\hat{B}}=\dfrac{c}{sen\,\hat{C}}$



Demostración: En el triángulo consideramos las alturas de los lados a y b

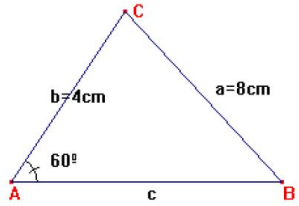
$$sen\,\hat{A}=\frac{h}{c}\rightarrow h=c\cdot sen\,\hat{A}$$

$$sen\,\hat{C}=\frac{h}{a}\rightarrow h=a\cdot sen\,\hat{C}$$

$$\rightarrow c\cdot sen\,\hat{A}=a\cdot sen\,\hat{C}\rightarrow \frac{a}{sen\,\hat{A}}=\frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Hay tres alturas → 3 igualdades.

Se utiliza cuando sabemos dos ángulos y un lado (nos da otro lado), o cuando nos da dos lados y un ángulo (nos da otro ángulo ¡!OJO!!, puede tener dos soluciones).



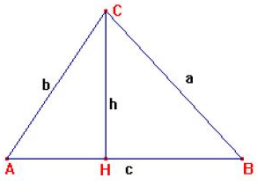
Ejemplo:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}}=\frac{b}{sen\,\hat{B}}\rightarrow sen\hat{B}=\frac{b}{a}senA\rightarrow senB=\frac{4}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\begin{cases}B=25º40'(Sí)\\B=154º20'(No)\end{cases}$$

Ojo tenemos que comprobar si alguna solución no es cierta: para ello nos fijamos que a mayor ángulo le debe corresponder mayor lado, y que la suma de los ángulos no sea mayor que 180º.

TEOREMA DEL COSENO:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\hat{B}$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\hat{C}$$

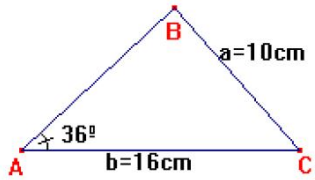


Demostración: $\overline{AH}=b\cdot\cos A \qquad \overline{HB}=c-\overline{AH}=c-b\cdot\cos A$

$$\left.\begin{aligned}a^2=h^2+\overline{HB}^2=h^2+c^2+b^2\cdot\cos^2A-2cb\cdot\cos A\\ b^2=h^2+\overline{AH}^2=h^2+b^2\cdot\cos^2A\end{aligned}\right\}a^2-b^2=c^2-2cb\cdot\cos A\rightarrow a^2=b^2+c^2-2cb\cdot\cos A$$

Ejemplo:

a) Dado el triángulo ABC., donde Â=26º, a=10cm y b=12cm. Determina $\hat{B}$, Ĉ y el lado c.



$$\frac{a}{sen\,\hat{A}}=\frac{b}{sen\,\hat{B}}\rightarrow sen\hat{B}=\frac{b}{a}senA\rightarrow senB=\frac{16}{10}\cdot 0'5878=0'94\begin{cases}\hat{B}=70'13º\\ \hat{B}=109'87º\end{cases}$$

$$\text{Si } \hat{B}=70'13º\rightarrow \hat{C}=180-A-B=73'87\rightarrow c=\frac{10}{sen\,36}\cdot sen\,73'87=16'34cm$$

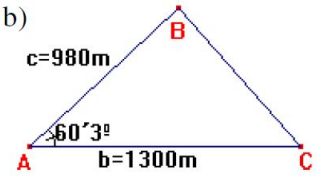
$$\text{Si } \hat{B}=109'87º\rightarrow \hat{C}=180-A-B=34'13º\rightarrow c=\frac{10}{sen\,36}\cdot sen\,34'13=9'55cm$$

Tiene dos soluciones:

A=36º	a=10cm	A=36º	a=10cm
B= 70´13º	b=16cm	B= 109´87º	b=16cm
C=73´87º	c=16´334cm	C=34´13º	c=9´55cm

Ejemplo:

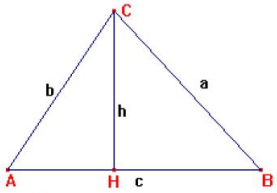
b)



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\hat{A} = 1300^2 + 980^2 - 2\cdot1300\cdot980\cdot\cos60'3^\circ =$$
$$a^2 = 1387971'313 \rightarrow \boxed{a = 1178'12m}$$

ÁREA DEL TRIÁNGULO: (normalmente se calcula razonando)

$$\boxed{S = \frac{1}{2}b\cdot c\cdot sen\ \hat{A} = \frac{1}{2}a\cdot c\cdot sen\ \hat{B} = \frac{1}{2}a\cdot b\cdot sen\ \hat{C}}$$



Demostración:

$S = \frac{1}{2}c\cdot h$ Base por altura partido por 2. Utilizando la definición de seno en el triángulo ACH.

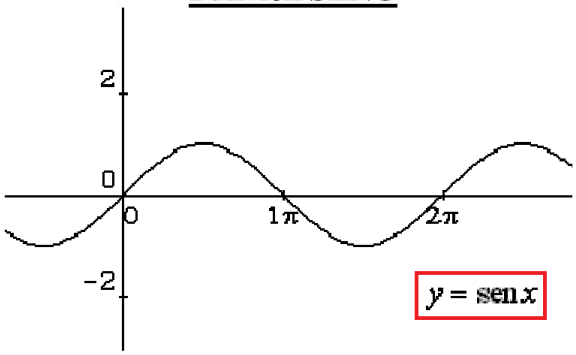
$sen\ \hat{A} = \frac{h}{b} \rightarrow h = b\cdot sen\ \hat{A} \rightarrow S = \frac{1}{2}c\cdot h = \frac{1}{2}c\cdot b\cdot sen\ \hat{A}$ (haciendo lo mismo para los demás ángulos salen las otras dos fórmulas).

Ejemplo: Si $\hat{A}=100^\circ$, b=12m y c=7m → Área=$S=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot sen\ \hat{A} = \frac{1}{2}\cdot12\cdot7\cdot sen\ 100^\circ = \boxed{41'36m^2}$

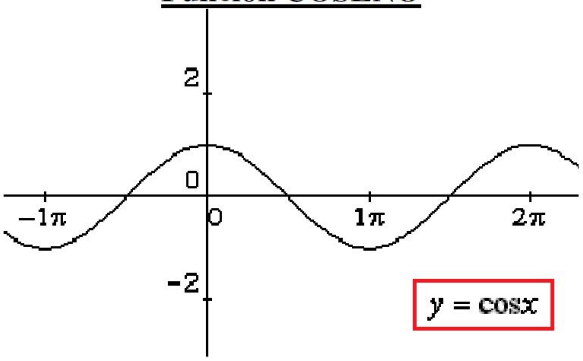
11. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Grados	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/6$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
Seno	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	- 1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	- 1/2	0
Coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	- 1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	- 1/2	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
Tangente	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	--	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	--	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

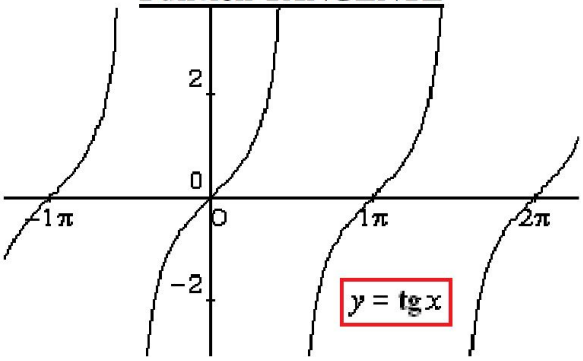
Función SENO



Función COSENO



Función TANGENTE



UNIDAD 12, 13 y 14 ANÁLISIS DE FUNCIONES

0. Esquema de la unidad.

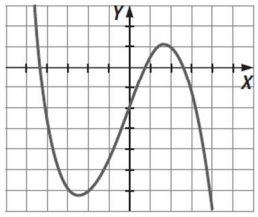
CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

Dominio y recorrido

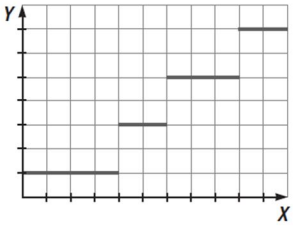
El **dominio de una función** es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente **(x)**.

El **recorrido de la función** es el conjunto de valores que toma la variable dependiente **(y)**.

Función continua



Función discontinua



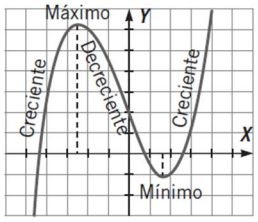
Crecimiento y decrecimiento

Función creciente:
$x \leq y \rightarrow f(x) \leq f(y)$

Función decreciente:
$x \geq y \rightarrow f(x) \geq f(y)$

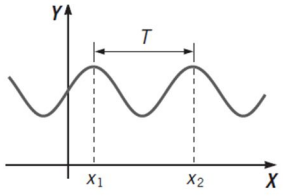
Máximo:
creciente → decreciente

Mínimo:
decreciente → creciente



Funciones periódicas

La gráfica se repite cada intervalo de valor *T*, denominado **período**.

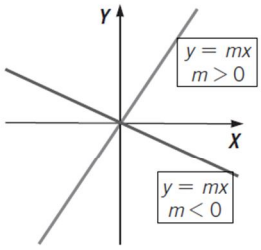


FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD

Función de proporcionalidad directa (F.Lineal)

Llamamos así a las funciones de la forma $y = mx$.

Su representación es una recta, con pendiente *m*, que pasa por el origen de coordenadas.

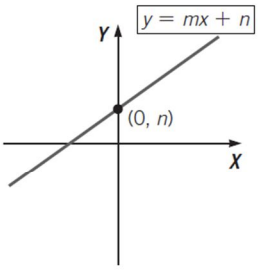


Función afín

Son funciones de la forma $y = mx + n$.

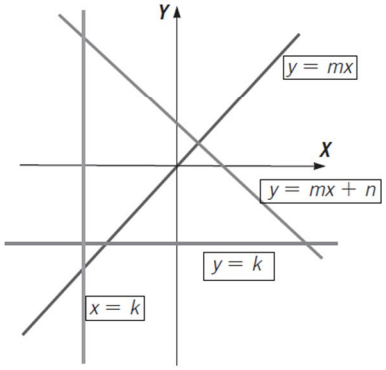
Su representación es una recta, con pendiente *m*, y cuya ordenada en el origen es (0, *n*).

No pasan por el origen de coordenadas.



Ecuaciones de la recta

- **Rectas del tipo** $y = mx$
  Son rectas de pendiente *m* que pasan por el origen de coordenadas.
- **Rectas del tipo** $y = mx + n$
  Son rectas de pendiente *m* y ordenada en el origen (0, *n*).
- **Rectas del tipo** $y = k$
  Son rectas paralelas al eje *X*. ⇨ Función constante
- **Rectas del tipo** $x = k$
  Son rectas paralelas al eje *Y*. No representan una función.



NOTA: **EJE X (ó EJE DE ABSCISAS)** **EJE Y (ó EJE DE ORDENADAS)**

12.1. Concepto de función.

Si en una relación entre dos magnitudes, cada valor de una de ellas está asociado a un único valor de la otra, se dice que esa correspondencia o relación es una **función**.

EJEMPLO: Las magnitudes *número de kilos de naranjas* y *coste* representan una función.
A un cierto número de kilos solo le corresponde un precio.

La **variable independiente (*x*)** puede tomar cualquier valor, y el valor de la **variable dependiente (*y*)** depende del que tome la variable independiente.

12.2. Formas de expresar una función.

La relación entre dos variables se puede expresar de diferentes maneras:

• **Mediante un texto:** descripción verbal y/o escrita que expresa la relación entre dos variables. Es lo que se suele llamar enunciado del problema. "A cada número le asociamos su cuadrado".
• **Mediante una tabla de valores:** los valores de las variables independiente y dependiente se organizan en forma de tabla.
• **Mediante un gráfico:** nos da una visión cualitativa de la relación que existe entre las variables. Puede ser una representación gráfica del conjunto de puntos en unos ejes de coordenadas.
• **Mediante una fórmula o expresión algebraica:** podemos calcular qué valor de la variable dependiente corresponde a un valor de la variable independiente. **y=f(x)**

12.3. Características de una función.

Una ***función*** es una relación o correspondencia entre dos magnitudes, de manera que a cada valor de la variable independiente ***x*** le corresponde **un único valor** de la variable dependiente ***y*.**

• El valor de la **variable independiente** se suele representar por ***x***, y también se llama **original**.
• El valor de la **variable dependiente** se suele representar por ***y***, y también se llama **imagen.**

Para indicar que una magnitud (*y*) depende o es función de otra (*x*) se utiliza la notación ***y = f (x),*** que se lee *"y es función de x"*.

12.3.1. Dominio (Dom) y recorrido(Im).

• El **dominio** de una función es el conjunto de todos los **valores** que puede tomar la **variable *x***.

Ejemplo: La función $\mathbf{y = x^2}$, asocia a cada nº su cuadrado, **Dom f = R (todos los nº reales)**

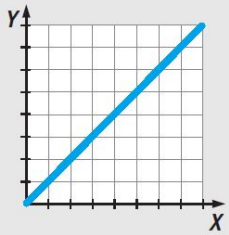
• El **recorrido** de una función es el conjunto de todos los **valores** que toma la **variable dependiente *y*.**

Ejemplo: La función $\mathbf{y = x^2}$, asocia a cada nº su cuadrado, **Im f = R^+**
La variable dependiente, toma solo valores positivos **(todos los nº reales positivos)**

12.3.2. Continuidad.

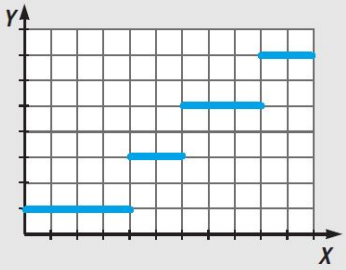
FUNCIÓN CONTINUA

Una función es continua si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo.



FUNCIÓN DISCONTINUA

Una función es discontinua si no se puede dibujar de un solo trazo.



Los puntos donde necesitamos levantar el lápiz del papel se denominan puntos de discontinuidad.

12.3.3. Puntos de discontinuidad.

Hay dos tipos de puntos de discontinuidad de la función:

A) Puntos donde la función no está definida.

B) Puntos en los que la gráfica de la función presenta un salto (Ejemplo anterior).

12.3.4. Puntos de corte con los ejes de una función.

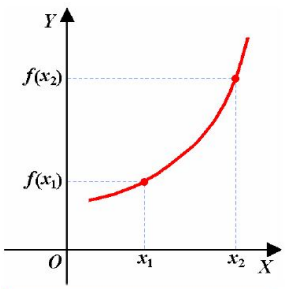
Son los puntos de intersección de la gráfica con ambos ejes de coordenadas (ejes X e Y)

- Los puntos de corte con el **eje X** son de la forma (a,0) y el valor de **a se calcula resolviendo la ecuación f(x) = 0.**
- El punto de corte con el **eje Y** es de la forma (0,b) y el valor de **b se calcula obteniendo f(0)**

12.3.5. Crecimiento y decrecimiento.

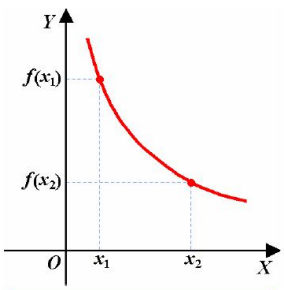
Dada una función $f(x)$ y dos valores x_1 y x_2, tales que $x_1 < x_2$:

- Si $\boldsymbol{f(x_2) > f(x_1)}$, la función es **creciente** entre x_1 y x_2.
- Si $\boldsymbol{f(x_2) < f(x_1)}$, la función es **decreciente** entre x_1 y x_2.
- Si $\boldsymbol{f(x_2) = f(x_1)}$, la función es **constante** entre x_1 y x_2.



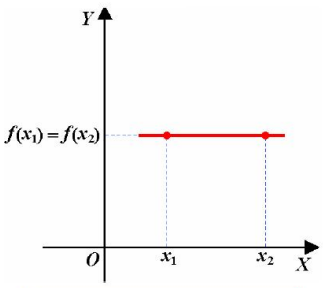
Función creciente

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



Función decreciente

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

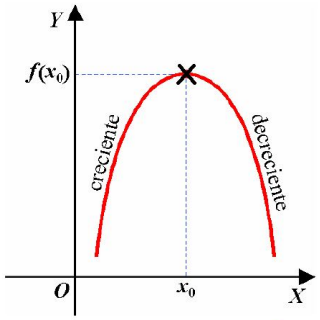


Función constante

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

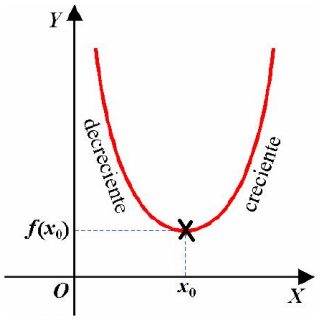
12.3.6. Máximos y mínimos.

- Una función ***y = f (x)*** tiene un ***máximo*** en un punto ***x = x₀*** si, en valores próximos a él, a la izquierda de ese punto la función es creciente y a la derecha de ese punto la función es decreciente; esto es, si los valores próximos a él que toma la función son menores.
- Una función ***y = f (x)*** tiene un ***mínimo*** en un punto ***x = x₀*** si, en valores próximos a él, a la izquierda de ese punto la función es decreciente y a la derecha de ese punto la función es creciente; esto es, si los valores próximos a él que toma la función son mayores.



Máximo en $x = x_0$

El punto x_0 tiene mayor ordenada, $f(x_0)$, que los demás



Mínimo en $x = x_0$

El punto x_0 tiene menor ordenada, $f(x_0)$, que los demás

No obstante, una función puede presentar varios máximos y mínimos. Para distinguirlos, definimos los siguientes conceptos asociados.

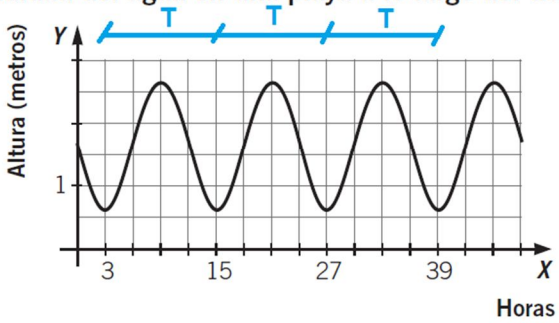
- Una función ***y = f (x)*** tiene un ***máximo (mínimo) absoluto*** en un punto ***x = x₀*** si los valores que toma la función son todos menores (mayores) que su imagen ***f (x₀).***
- Una función ***y = f (x)*** tiene un ***máximo (mínimo) relativo*** en un punto ***x = x₀*** si los valores próximos a él que toma la función son todos menores (mayores) que su imagen ***f (x₀).***

12.3.7. Periodicidad.

En una **función periódica**, su gráfica se repite cada cierto intervalo, que se denomina período, es decir: $f(x) = f(x + T)$, siendo **"*T*" el valor del período**.

EJEMPLO

Analiza cómo varía la profundidad del agua en una playa a lo largo del tiempo.



Esta función es periódica porque si tomamos la gráfica en el intervalo [3, 15], vemos que se repite exactamente igual en el intervalo [15, 27] y sigue repitiéndose en [27, 39], y así de forma sucesiva.

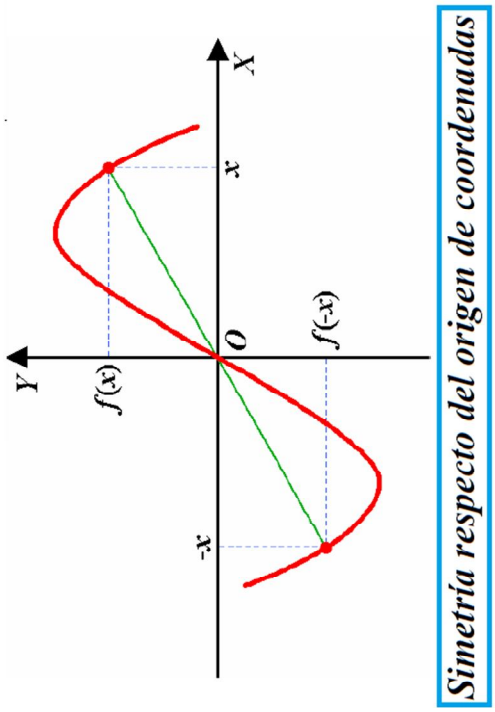
Se llama período a la longitud del intervalo que se repite:

$$\left.\begin{array}{l}[3, 15] \rightarrow 3 - 15 = 12\\ [15, 27] \rightarrow 27 - 15 = 12\\ [27, 39] \rightarrow 39 - 27 = 12\end{array}\right\} \rightarrow \text{En este caso, el período es } 12.$$

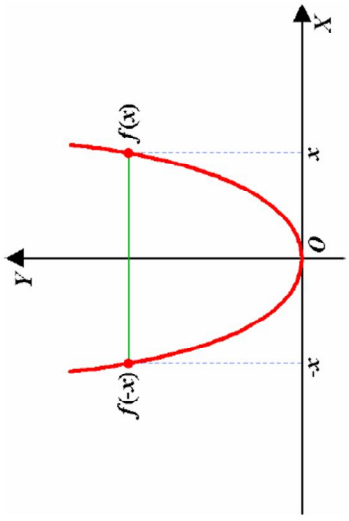
12.3.8. Simetrías.

- Una función ***y = f (x)*** es ***simétrica respecto del eje de ordenadas,*** o se dice que tiene ***simetría par,*** si para cualquier valor ***x*** se verifica que ***f (-x) = f (x).***

- Una función ***y = f (x)*** es ***simétrica respecto del origen de coordenadas,*** o se dice que tiene ***simetría impar,*** si para cualquier valor ***x*** se verifica que ***f (-x) = -f (x).***



Simetría respecto del origen de coordenadas



Simetría respecto del eje de ordenadas

12.4. Diferencias entre una función lineal y una función afín.

FUNCIÓN LINEAL

• Una **función de proporcionalidad directa o función lineal** se expresa de la forma:

$y = m \cdot x$, siendo m un número cualquiera.

• La **representación gráfica** de estas funciones es una **recta que pasa por el origen de coordenadas (0,0).**

• Al número ***m*** se le llama **pendiente de la recta.**

Si $m > 0$, la recta es **creciente**.

Si $m < 0$, la recta es **decreciente**

• Si entre dos magnitudes existe una **relación de proporcionalidad directa**, la función que representa dicha relación es una función lineal.

EJEMPLO

Observa la tabla y determina si la relación entre las magnitudes es de proporcionalidad directa.

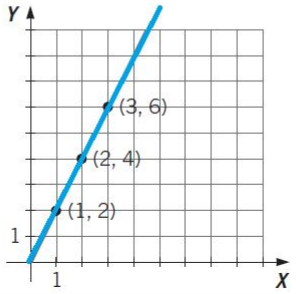
BOLSAS DE PALOMITAS	1	2	3	4	5	6
IMPORTE (€)	2	4	6	8	10	12

- El número de bolsas de palomitas y el dinero que cuestan son magnitudes directamente proporcionales, ya que al comprar el doble de bolsas se duplicará el coste…
- La constante de proporcionalidad es: $m = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \ldots = 2$
- La expresión algebraica de la función se puede expresar de la forma:

$$y = m \cdot x \rightarrow y = 2 \cdot x$$

donde x es el número de bolsas de palomitas e y es el importe en euros.

- La representación gráfica de esta función es una recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene por pendiente $m = 2$.
Para representarla hay que señalar en unos ejes de coordenadas los puntos (1, 2), (2, 4), (3, 6)… y unirlos mediante una recta.



FUNCIÓN AFÍN

• Una **función afín** se expresa de la forma:

$y = m \cdot x + n$, siendo m y n dos números cualesquiera.

Al número ***m*** se le llama **pendiente de la recta.**

Si $m > 0$, la recta es **creciente**.

Si $m < 0$, la recta es **decreciente**.

Al número ***n*** se le llama **ordenada en el origen.**

• La representación gráfica de estas funciones es una recta que no pasa por el origen de coordenadas, sino por el punto $(0, n)$.

• Las funciones de proporcionalidad directa o **funciones lineales** son un caso particular de las funciones afines cuando $n = 0$.

EJEMPLO

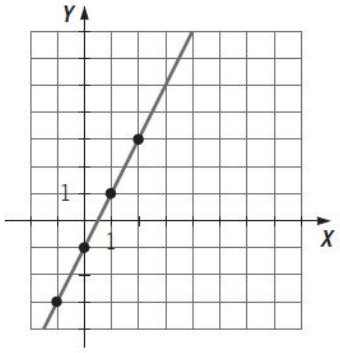
Dadas las funciones $y = 2x - 1$ e $y = -3x + 4$:

a) Determina su pendiente.
b) Halla la ordenada en el origen.
c) Represéntalas gráficamente.
d) ¿Cuál de ellas tiene mayor pendiente?
e) ¿Cómo son las rectas, crecientes o decrecientes?

Función 1

a) $m_1 = 2$
b) $n_1 = -1$
c)

x	y
0	-1
1	1
2	3
-1	-3

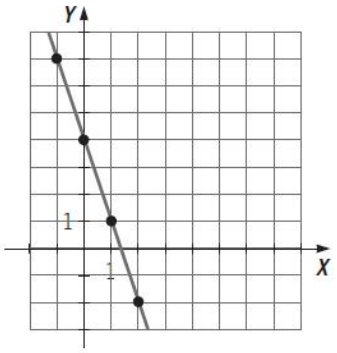


d) $m_1 > m_2$
e) $m_1 > 0 \rightarrow$ Creciente

Función 2

$m_2 = -3$
$n_2 = 4$

x	y
0	4
1	1
2	-2
-1	7



$m_2 < 0 \rightarrow$ Decreciente

12.5. Función constante.

Es una función con ecuación de la forma **y = K.**

- El valor de la variable y es el mismo, K, para cualquier valor de la variable x.
- Su gráfica es una línea recta paralela al eje X.
- Su pendiente es m=0 (es una función afín con m=0).
- Su ordenada en el origen es n, es decir, la recta corta al eje Y en el punto (0, K).

12.6. Ecuaciones y gráficas.

Para representar gráficamente una función, se representan gráficamente 2 de sus puntos y unen mediante una recta que pasa por ellos.

Cuando **la gráfica de una función es una recta**, hay dos tipos:

- La que **pasa** por el origen de coordenadas (0,0) **$y = m \cdot x$, Función lineal**
- La que **no pasa** por el origen de coordenadas (0,0) **$y = m \cdot x + n$, Función afín**

12.7. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

• Para representar una recta basta con conocer dos puntos por los que pasa.

• Para hallar la ecuación de la recta $y = m \cdot x + n$ que pasa por dos puntos, conocidas sus coordenadas, $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$, se procede así:

1.º **Calculamos el valor de la pendiente**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2.º Sustituimos las coordenadas de uno de los puntos en la ecuación general de la recta, y **obtenemos el valor de la ordenada en el origen**, ***n***.

$y_1 = m \cdot x_1 + n$; $n = y_1 - m \cdot x_1$

o utilizándo las coordenadas del segundo punto:

$y_2 = m \cdot x_2 + n$; $n = y_2 - m \cdot x_2$

3.º **Sustituimos los valores obtenidos** para la pendiente (m) y la ordenada en el origen (n), en la ecuación general de la recta.

EJEMPLO

Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(3, 2) y *B*(4, 0).

1.º Calculamos el valor de la pendiente: $m = \dfrac{0-2}{4-3} = -2$

2.º Obtenemos el valor de la ordenada en el origen sustituyendo, por ejemplo, el punto A:

$y = mx + n \rightarrow 2 = -2 \cdot 3 + n \rightarrow n = 8$

3.º Sustituimos los valores obtenidos: $y = mx + n \xrightarrow{m = -2,\ n = 8} \boxed{y = -2x + 8}$

12.8. Posiciones relativas de dos rectas.

Dos rectas pueden ser:

• Paralelas: si tienen la misma pendiente, y sus ordenadas en el origen son distintas.
• Coincidentes: si tienen la misma pendiente, y sus ordenadas en el origen coinciden.
• Secantes: si no tienen la misma pendiente. Y se cortan en un punto.

En las rectas secantes, podemos calcular ese punto de corte mediante dos formas:

– **Método gráfico:** dibujamos las rectas y observamos en qué punto se cortan.

– **Método algebraico:** resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las dos rectas.

EJEMPLO

Determina si las siguientes rectas son paralelas o secantes.

$\left.\begin{array}{l} y = 2x + 3 \longrightarrow m = 2 \\ y = -x + 5 \longrightarrow m = -1 \end{array}\right\}$ Sus pendientes son distintas → Rectas secantes

$\left.\begin{array}{l} y = 3x + 5 \longrightarrow m = 3 \\ y = 3x - 0{,}5 \rightarrow m = 3 \end{array}\right\}$ Sus pendientes son iguales ⟶ Rectas paralelas

ESQUEMA DEL ANÁLISIS DE FUNCIONES.

1. Dominio de una función:
    a. El dominio de una función **polinómica** es R.
    b. Dominio de una función **racional** es R-{raíces del denominador}
    c. Dominio depende de lo que hay dentro de la **raíz** y del valor de n.
        i. Si n es par Dominio de la función son los valores para los que el algo≥0
        ii. Si n es impar el dominio de la función es el dominio del algo

    Imagen o Recorrido

2. Puntos de Cortes con los ejes:

    a. Con el eje OX, f(x) = 0. Resolver. Son (a,0) (b,0),…
    b. Con el eje OY f(0) Son (0,f(0))

3. Simetría Par e Impar
    a. Par f(x) = f(-x)
    b. Impar f(-x)= -f(x)

4. Regiones (Estudio del signo de f(x), usando los ptos de cortes con OX y ptos con problemas)

5. Asíntotas (Ramas Infinitas):
    a. Asíntotas verticales x= a
    b. Asíntotas horizontales. y= m
    c. Asíntotas oblicuas y=mx+n

6. Monotonía (Creciente o decreciente). Máximos y mínimos relativos.

7. Curvatura (Convexo y cóncavo). Ptos de Inflexión

8. Continuidad

9. Representación gráfica.

EJEMPLOS DE FUNCIONES ELEMENTALES

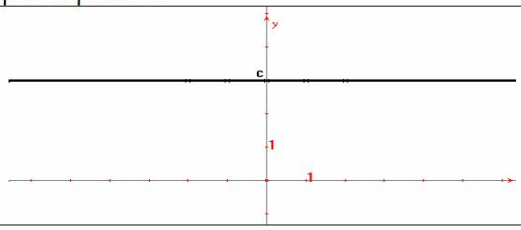
A. FUNCIONES POLINOMICAS

$f(x)=a_n x^n+\ldots\ldots+a_1 x+a_0$. El dominio de una función polinómica es *IR*.

A1. Grado cero. Función constante *f(x)=c.*

Su representación gráfica es una recta paralela al eje *OX* por el punto c.

x	1	2	0	-1	-2
f(x)	c	c	c	c	c



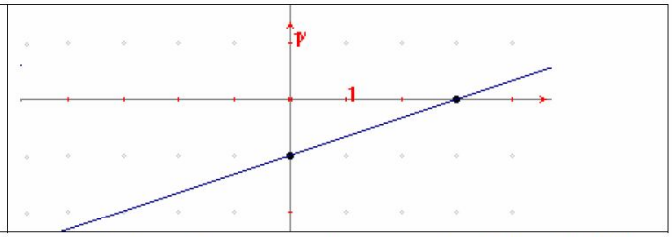
A2. Grado uno. Función lineal *f(x)=mx+n.*

Su representación gráfica es una recta. Con dos valores se puede representar.

m se llama pendiente (nos va a indicar la inclinación) y *n* se llama ordenada en el origen (nos indica el valor de la función en 0).

$$y=\frac{x}{3}-1$$

x	0	3
f(x)	-1	0



Cálculo de la pendiente a partir de dos puntos: Si la recta pasa por los puntos (*a,f(a)*) y (*b,f(b)*).

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

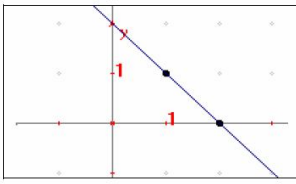
y=5x-1 La pendiente m=5

Si una función lineal pasa por los puntos (2,9) y (3,14) su pendiente será

$$m=\frac{14-9}{3-2}=\frac{5}{1}=5$$

Ecuación punto-pendiente:

Si tenemos en una función lineal la pendiente *m* y un punto (*a,f(a)*) la ecuación de la recta en su forma punto - pendiente será: $\boxed{y-f(a)=m(x-a)}$



¿Cuál es la función lineal que pasa por los puntos (1,1) y (2,0)?

$$m=\frac{0-1}{2-1}=-1\rightarrow y-1=-1(x-1)\rightarrow y=-x+1+1\rightarrow \boxed{y=-x+2}$$

A3. Grado dos. Función cuadrática *f(x)=ax²+bx+c*. Parábola.

Pasos:

1. Si *a>0* la gráfica será convexa. $\cup$. Si a<0 la gráfica será cóncava $\cap$
2. Hallamos el vértice $V=\left(\frac{-b}{2a},f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$
3. Puntos de corte con el eje OX.

$ax^2+bx+c=0$

(si no tiene puntos de corte se le dan dos valores)

Ejemplo: $y=x^2-6x+8$

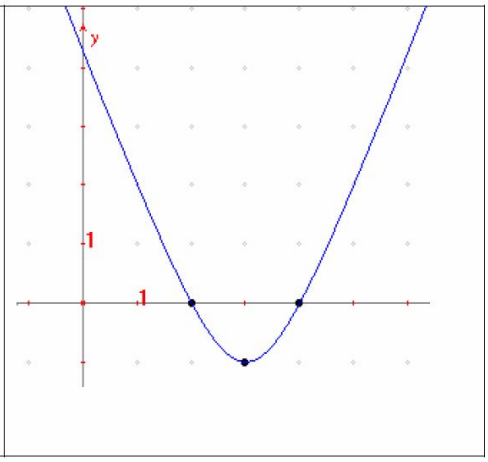
a=1>0 la gráfica será convexa. $\cup$.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{-b}{2a}=\frac{+6}{2\cdot 1}=3\\ f(3)=3^2-6\cdot 3+8=-1\end{array}\right\}$$

$V=(3,-1)$

$x^2-6x+8=0$

$$\begin{cases}x=4\rightarrow(4,0)\\ x=2\rightarrow(2,0)\end{cases}$$



A4.Función polinómica de grado mayor que dos.

Pasos:

1. Puntos de corte con el eje OX.
2. Darle unos cuantos valores entre los puntos de corte
3. Dibujar aproximadamente

Ej.: $f(x)=x^4-10x^2+9$

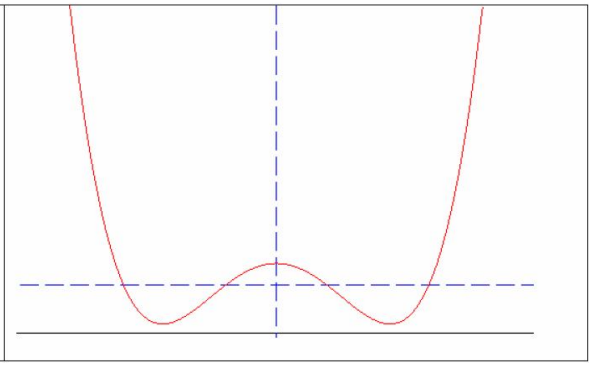
$x^4-10x^2+9=0$

$$z=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\begin{cases}1\\ 9\end{cases}$$

$x=\pm 1$ y $x=\pm 3$

(-3,0), (-1,0), (1,0) y (3,0)

x	-4	-2	0	2	4
f(x)	105	-15	9	-15	105



B. FUNCIONES RACIONALES

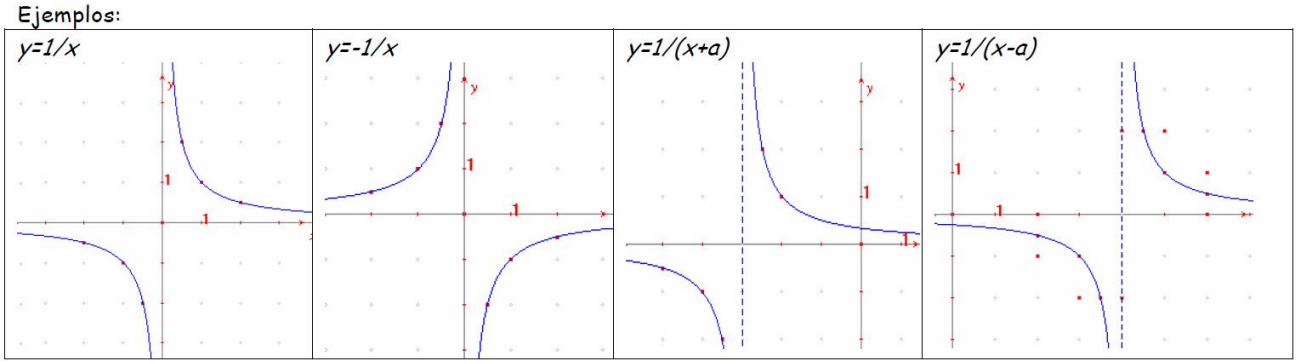
$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Dominio de una función racional es *IR*-{raíces del denominador}

Normalmente tiene una asíntota vertical en cada raíz del denominador.

$f(x)=\dfrac{x+3}{x^3+x^2-4x-4}$ Por Ruffini las raíces del denominador son -1, 2 y -2. *Dom f(x)=IR-{-2,-1,2}*

Hipérbolas: Tienen por ecuación $f(x)=\dfrac{c}{ax+b}$ *Dom f(x)=IR-{b/a}* tiene una asíntota vertical en *x=-b/a.*

Ejemplos:



C. FUNCIONES IRRACIONALES.

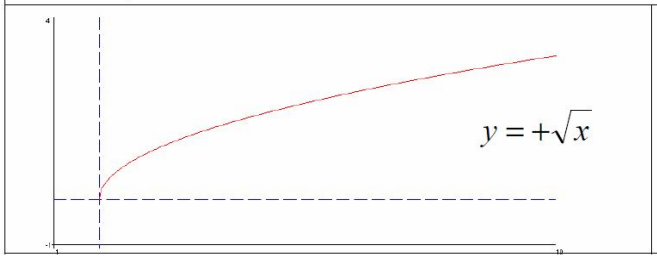
$f(x)=\sqrt[n]{algo}$. Dominio depende de lo que hay dentro de la raíz y del valor de n.

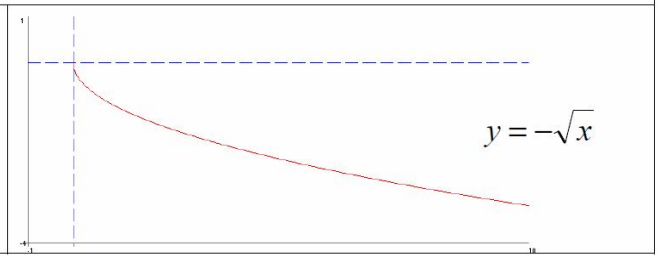
Si **n** es **par Dominio** de la función son los valores para los que el ***algo*≥0**

Si **n** es **impar** el **dominio** de la función es el **dominio del *algo***

$f(x)=\sqrt{x^2-4}\rightarrow x^2-4\geq 0\rightarrow$ $Dom\ f(x)=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

$f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+3}}$ el domino será el de $\dfrac{x-1}{x+3}\rightarrow$(x+3=0 x=-3) *Dom f(x)=IR-{-3}*





D. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS.

Dominio depende de la definición de la función en cada trozo, normalmente el dominio será la unión de cada trozo de definición.

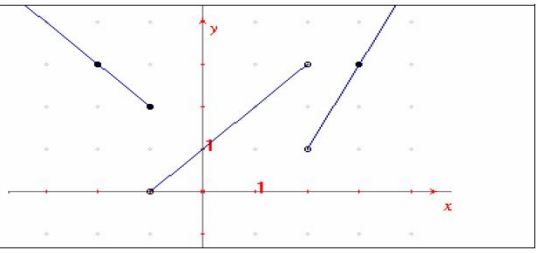
Para representarlo se representará todas las funciones (algunas nos olvidaremos de los trozos de definición) y nos quedaremos con el trozo dónde esté definida. Siempre se deben dar los valores de la función en los límites de cada trozo.

$$f(x)=\begin{cases}2x+3 & si\ x>2\\ 1+x & si\ -1<x<2\\ 1-x & si\ x\leq 1\end{cases}$$

Dom f(x)=IR-{2}

1-x		*1+x*		*2x-3*	
x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
-1	2	-1	0	2	1
-2	3	2	3	3	3

Son trozos de rectas

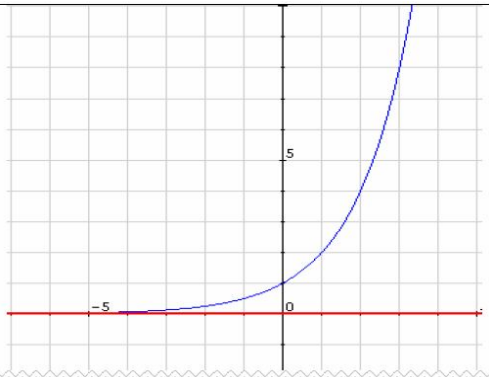


La función exponencial y la logarítmica son inversas una de la otra.

E. FUNCIÓN EXPONENCIAL

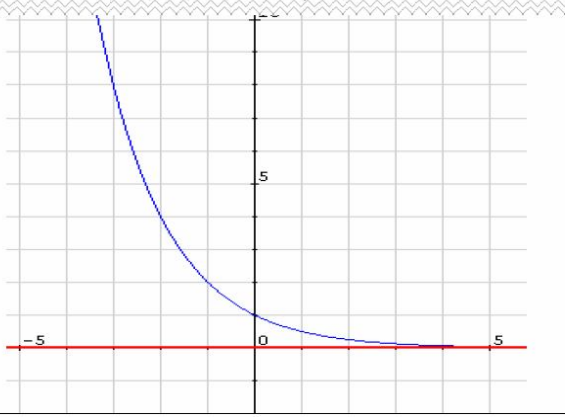
$y = a^x$ con $a > 1$. Propiedades:

1) Dominio= IR
2) Recorrido= IR^+
3) Es creciente.
4) Pasa por el punto (0,1).
5) Son funciones continuas.
6) Asíntota horizontal en $y = 0$ (cuando $x \to -\infty$)



$y = a^x$ con $0 < a < 1$. Propiedades:

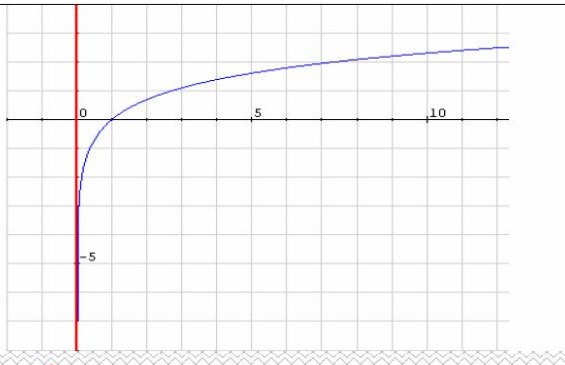
1) Dominio= IR
2) Recorrido= IR^+
3) Es decreciente.
4) Pasa por el punto (0,1).
5) Son funciones continuas.
6)Asíntota horizontal en $y = 0$ (cuando $x \to +\infty$)



F. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

$y = \log_a x$ con $a > 1$. Propiedades:

1) Dominio= IR^+
2) Recorrido= IR
3) Es creciente.
4) Pasa por el punto (1,0).
5) Son funciones continuas.
6) Asíntota horizontal en $x = 0$

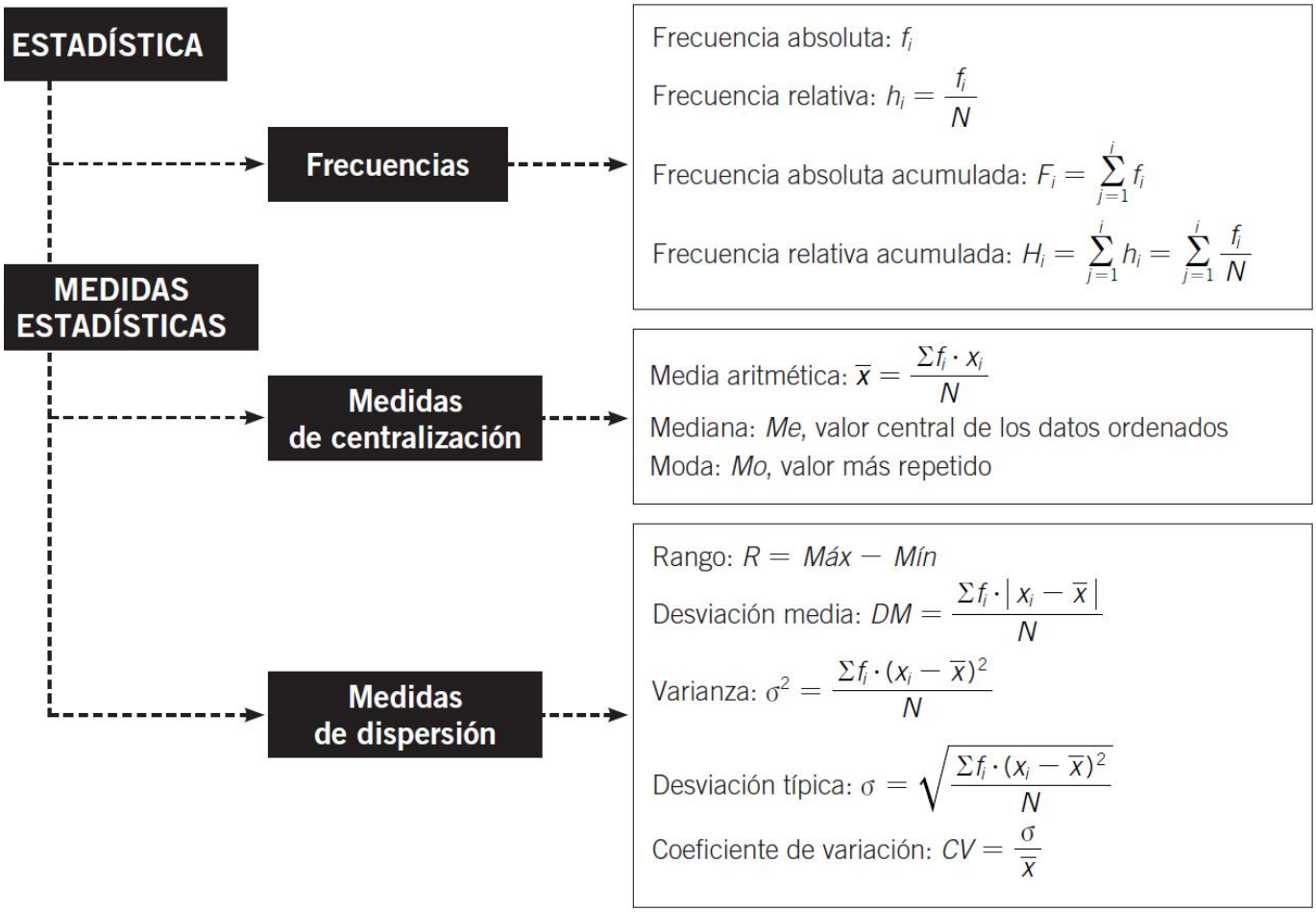


$y = a^x$ con $0 < a < 1$. Propiedades:

1) Dominio= IR
2) Recorrido= IR^+
3) Es decreciente.
4) Pasa por el punto (1,0).
5) Son funciones continuas.
6)Asíntota vertical en $x = 0$

UNIDAD 15. *ESTADÍSTICA*.

0. Esquema de la unidad.



15.1. Definición de Estadística.

Es la ciencia encargada de recopilar y ordenar datos referidos a diversos fenómeno para su posterior análisis e interpretación.

15.2. Conceptos básicos.

• **Población:** es el conjunto de elementos en los que se estudia un determinado aspecto o característica.
• **Muestra:** es la parte de la población que estudiamos.
• **Individuo:** es cada elemento de la población o de la muestra.
• **Tamaño:** Número de elementos que tiene la población o la muestra.

15.3. Variables estadísticas.

Variable estadística es toda característica o aspecto de los elementos de una población o muestra que se puede estudiar.

Las variables estadísticas pueden ser **cuantitativas o cualitativas**:

• **Variables cuantitativas:** los valores que puede tomar son números. Pueden ser discretas o continuas. Ej: Peso de las personas, El nº de hermanos

– **Variables cuantitativas discretas:** toman un número determinado de valores.
– **Variables cuantitativas continuas:** pueden tomar cualquier valor comprendido entre dos dados. Ej: Altura entre 1.7 y 1.8 m

• **Variables cualitativas:** no se pueden medir, no son números, sino cualidades. Ej: Sexo, Color del pelo, etc.

15.4. Tablas estadísticas o de recuento.

Nos sirven para organizar los datos de una variable estadística y estudiarlos con mayor facilidad.

• **Si la variable es discreta** y tenemos un conjunto de datos pequeño, se forma una tabla con dos columnas.
En una de las columnas se colocan los distintos valores de la variable, y en la otra columna, el número de veces que aparece cada uno de ellos.
• **Si la variable es continua**, se agrupan los valores en intervalos de igual amplitud, se establece la marca de clase, que es el punto medio de cada intervalo, y se hace el recuento de los datos de cada intervalo.

EJEMPLO

Las estaturas (en cm) de 27 jóvenes son:

155, 178, 170, 165, 173, 168, 160, 166, 176, 169, 158, 170, 179, 161, 164, 156, 170, 171, 167, 151, 163, 158, 164, 174, 176, 164, 154

Forma una tabla, efectúa el recuento y obtén las marcas de clase.

En este caso, la variable es continua. Por tanto, debemos agrupar los datos en intervalos.

Para ello obtenemos la diferencia entre el valor mayor y el menor:

$$179 - 151 = 28$$

Para incluir todos los valores, tomamos 6 intervalos de amplitud 5 ($6 \cdot 5 = 30$, que es mayor que la diferencia entre el mayor y el menor).

Empezamos por el valor 150.

Marcas de clase:
$(150 + 155)/2 = 152{,}5$
$(155 + 160)/2 = 157{,}5$
$(160 + 165)/2 = 162{,}5$
$(165 + 170)/2 = 167{,}5$
$(170 + 175)/2 = 172{,}5$
$(175 + 180)/2 = 177{,}5$

INTERVALO	MARCA DE CLASE	RECUENTO
[150, 155)	152,5	2
[155, 160)	157,5	4
[160, 165)	162,5	6
[165, 170)	167,5	5
[170, 175)	172,5	6
[175, 180]	177,5	4

15.5. Frecuencia absoluta y relativa.

• **Frecuencia absoluta**, f_i, de un conjunto de datos es el número de veces que se repite cada valor de la variable, x_i, en el total de los datos.

La suma de las frecuencias absolutas es igual al número total de datos, N.

• **Frecuencia relativa**, h_i, es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos:

$$h_i = \frac{f_i}{N}$$

La frecuencia relativa es siempre un número comprendido entre 0 y 1.

La suma de las frecuencias relativas es 1. $\sum h_i = 1$

• **Porcentaje (%)** es el resultado de multiplicar la frecuencia relativa por 100.

Se representa una tabla de frecuencias, donde se indica el recuento de datos, los valores de la variable, la frecuencia absoluta, la frecuencia relativa y el porcentaje.

EJEMPLO

Las edades (en años) de 20 alumnos de un instituto son:

13, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16

Obtén la tabla de frecuencias y porcentajes.

Comenzamos a construir la tabla.

– En la primera columna colocamos los valores de la variable.

– En la segunda columna colocamos el número de veces que aparece cada dato. A este número se le llama frecuencia absoluta.

– En la tercera columna colocamos el *cociente* entre la frecuencia absoluta de cada dato y el número total de datos (20). A este número se le denomina *frecuencia relativa.*

$$h_1 = \frac{f_1}{N} = \frac{6}{20} = 0{,}30 \qquad h_2 = \frac{f_2}{N} = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

$$h_3 = \frac{f_3}{N} = \frac{4}{20} = 0{,}20 \qquad h_4 = \frac{f_4}{N} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

x_i	f_i	h_i	%
13	6	0,30	30
14	7	0,35	35
15	4	0,20	20
16	3	0,15	15
Suma	20	1	100

– En la cuarta columna colocamos el porcentaje, resultado de multiplicar la frecuencia relativa por 100.

15.6. Frecuencias acumuladas

• **Frecuencia absoluta acumulada, F_i**, de un valor x_i es la suma de las frecuencias f_j de todos los valores menores o iguales que él.

• **Frecuencia relativa acumulada, H_i**, de un valor x_i es el cociente entre la frecuencia absoluta acumulada y el número total de datos:

$$H_i = \frac{F_i}{N}$$

EJEMPLO

Las edades (en años) de 20 alumnos de un instituto son:

13, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16

Obtén la tabla de frecuencias absolutas acumuladas y frecuencias relativas acumuladas.

– Para obtener la frecuencia absoluta acumulada de cada valor hay que sumar las frecuencias absolutas de los valores menores o iguales que él:

$F_1 = f_1 = 6$ $\qquad F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = 6 + 7 + 4 = 17$

$F_2 = f_1 + f_2 = 6 + 7 = 13$ $\qquad F_4 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 6 + 7 + 4 + 3 = 20$

– Para obtener la frecuencia relativa acumulada de un valor hay que dividir la frecuencia absoluta acumulada de cada valor entre el número total de datos:

$$H_1 = \frac{F_1}{N} = \frac{f_1}{N} = \frac{6}{20} = 0{,}30 \qquad H_3 = \frac{F_3}{N} = \frac{f_1 + f_2 + f_3}{N} = \frac{6 + 7 + 4}{20} = \frac{17}{20} = 0{,}20$$

$$H_2 = \frac{F_2}{N} = \frac{f_1 + f_2}{N} = \frac{6 + 7}{20} = \frac{13}{20} = 0{,}65 \qquad H_4 = \frac{F_4}{N} = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}{N} = \frac{6 + 7 + 4 + 3}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

DATOS x_i	FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA (F_i)	FRECUENCIA RELATIVA (h_i)	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA (H_i)
13	6	6	0,30	0,30
14	7	13	0,35	0,65
15	4	17	0,20	0,85
16	3	20	0,15	1

15.7. Gráficos estadísticos.

Los **gráficos** ayudan a representar fácilmente la información que contienen las tablas estadísticas.

Según sea la variable, se usa un tipo u otro de gráfico.

• **Diagrama de barras:** se usa para representar datos cualitativos o cuantitativos discretos.
Sobre el eje *X* se señalan los valores de la variable y se levantan barras de altura igual a la frecuencia representada (absoluta, absoluta acumulada, relativa o relativa acumulada).
• **Polígono de frecuencias:** es una línea poligonal que se obtiene a partir del diagrama de barras, uniendo cada extremo de una barra con el extremo de la barra siguiente.
• **Histograma:** se usa para representar variables cuantitativas continuas.
Se señalan sobre el eje horizontal los extremos de los intervalos y se levantan rectángulos de altura igual a la frecuencia representada.
• **Polígono de frecuencias:** se obtiene al unir los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos del histograma.

15.8. Medidas de centralización.(Resumen de la información de la muestra)

- **MEDIA ARITMÉTICA:**

Dado un conjunto de datos: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con frecuencias $f_1, f_2, \ldots, f_n$, la **media aritmética** es igual a:

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

Si los datos están agrupados en intervalos, el valor x_i es la marca de clase de cada intervalo.

EJEMPLO

Halla la media del siguiente conjunto de datos.

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
26	6	156
28	7	196
30	4	120
32	3	96
Suma	20	568

$$\overline{x} = \frac{568}{20} = 28{,}4$$

En la tabla de frecuencias hemos añadido una tercera columna donde se calcula el producto de cada valor por su frecuencia relativa.

- La **MEDIANA** de un conjunto de datos es el valor tal que, ordenados los datos de forma creciente, la mitad son menores que él y la otra mitad son mayores. Se representa por ***Me***.

– Si el conjunto de datos es un número impar, la mediana es el valor central.
– Si el conjunto de datos es un número par, la mediana es la media de los dos valores centrales.

- La **MODA** de un conjunto de datos es el valor o valores de la variable que más se repite.

Se representa por ***Mo***.

El valor de la moda puede no ser único, es decir, puede haber varias modas.

EJEMPLO

Obtén la mediana y la moda del siguiente conjunto de datos: 2, 2, 1, 6, 4, 3 y 9.

- Mediana:
  Ordenamos de forma creciente los datos: 1, 2, 2, **3**, 4, 6, 9.
  Como el número de datos es impar, la mediana es el valor central: $Me = 3$
- Moda: el valor que más se repite es 2; por tanto, $Mo = 2$

15.9. Medidas de posición.

Son valores de la variable que informan del lugar que ocupa un dato dentro del conjunto ordenado de todos los datos. Por eso se introduce el concepto de los **CUARTILES.**

Primer cuartil (Q_1): es el menor valor que supera a la cuarta parte de los datos.
Segundo cuartil(Q_2): es el menor valor que supera a la mitad de los datos, es decir, la mediana.
Tercer cuartil(Q_3): es el menor valor que supera las tres cuartas partes de los datos.

EJEMPLO

2 2 3 **3** 3 4 4 **5** 6 6 7 **7** 8 8 9

$Q_1 = 3$ $Q_2 = Me = 5$ $Q_3 = 7$

EJEMPLO

2 2 3 **3** **3** 4 4 **5** **6** 6 7 **7** **8** 8 9 9

$Q_1 = \frac{3+3}{2} = 3$ $Q_2 = Me = \frac{5+6}{2} = 5'5$ $Q_3 = \frac{7+8}{2} = 7'5$

Para el caso de que los datos se dan en intervalos_ VER EL EJEMPLO SIGUIENTE:

Hallemos los cuartiles de la distribución estadística continua correspondiente a los datos obtenidos de las alturas de 32 personas.

***Talla* (cm)**	x_i	n_i	N_i
[150, 155)	152'5	2	2
[155, 160)	155'5	3	5
[160, 165)	162'5	10	15
[165, 170)	167'5	12	37
[170, 175]	172'5	5	32
Total		**32**	

$N/4 = 8$, luego el intervalo correspondiente al primer cuartil es [160, 165) ya que es el primer intervalo cuya frecuencia absoluta acumulada, 15, sobrepasa a la cuarta parte del número de individuos.
El valor aproximado del primer cuartil es entonces 162'5 cm.
Obtengamos su valor exacto:

$$Q_1 = e_i + \frac{\frac{N}{4} - N_{Q_1-1}}{n_{Q_1}} \cdot a = 160 + \frac{\frac{32}{4} - 5}{10} \cdot 5 = 160 + 1'5 = 161'5 \text{ cm}$$

$N/2 = 16$, con lo que el intervalo [165, 170) es el intervalo mediano o intervalo correspondiente al segundo cuartil, ya que es el primero cuya frecuencia absoluta acumulada, 37, sobrepasa a la mitad del número de individuos.
El valor aproximado del segundo cuartil o mediana es 167'5 cm.
Hallamos su valor exacto:

$$Q_2 = Me = e_i + \frac{\frac{N}{2} - N_{Me-1}}{n_{Me}} \cdot a = 165 + \frac{\frac{32}{2} - 15}{12} \cdot 5 = 165 + 0'42 = 165'42 \text{ cm}$$

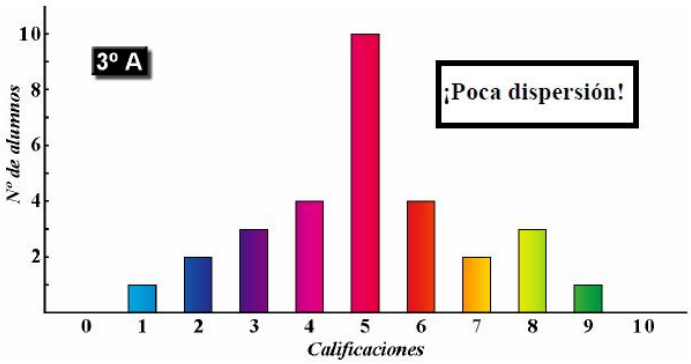
$3N/4 = 24$, por lo que [165, 170) es también el intervalo correspondiente al tercer cuartil, pues es el primer intervalo cuya frecuencia absoluta acumulada, 37, sobrepasa a las tres cuartas partes del número de individuos.
Consecuentemente, el valor aproximado del tercer cuartil es también 167'5 cm.
Calculamos su valor exacto:

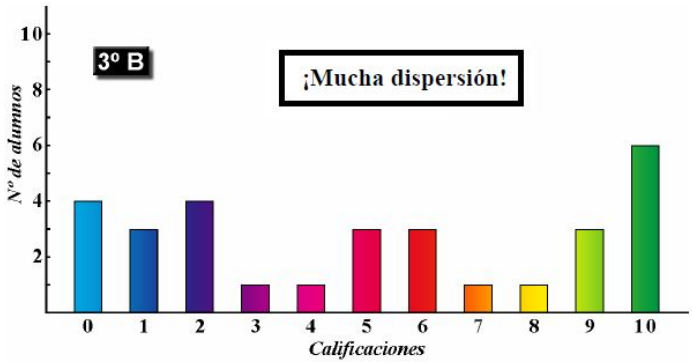
$$Q_3 = e_i + \frac{\frac{3N}{4} - N_{Q_3-1}}{n_{Q_3}} \cdot a = 165 + \frac{\frac{3 \cdot 32}{4} - 15}{12} \cdot 5 = 165 + 3'75 = 168'75 \text{ cm, valor bastante superior a la mediana}$$

15.10. Medidas de dispersión.

UTILIDAD: Nos permite conocer el grado de agrupamiento de los datos hacia las medidas de centralización.

EJEMPLO: Este año hay dos cursos de 3º de ESO muy desiguales en cuanto al rendimiento en Matemáticas. Observa sus calificaciones.





MEDIDA	CÁLCULO	DEFINICIÓN
RANGO O RECORRIDO	$R = Máx - Mín$	**Diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable**
DESVIACIÓN MEDIA	$DM = \dfrac{\Sigma f_i \cdot \lvert x_i - \overline{x} \rvert}{N}$	**Media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones de cada dato**
VARIANZA	$\sigma^2 = \dfrac{\Sigma f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{N}$	**Media de los cuadrados de las desviaciones**
DESVIACIÓN TÍPICA	$\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{N}}$	**Raíz cuadrada positiva de la varianza**
COEFICIENTE DE VARIACIÓN	$CV = \dfrac{\sigma}{\overline{x}}$	**Cociente entre la desviación típica y la media**

EJEMPLO

La tabla muestra los resultados obtenidos en un test de 120 preguntas. Halla la desviación media, la varianza y la desviación típica.

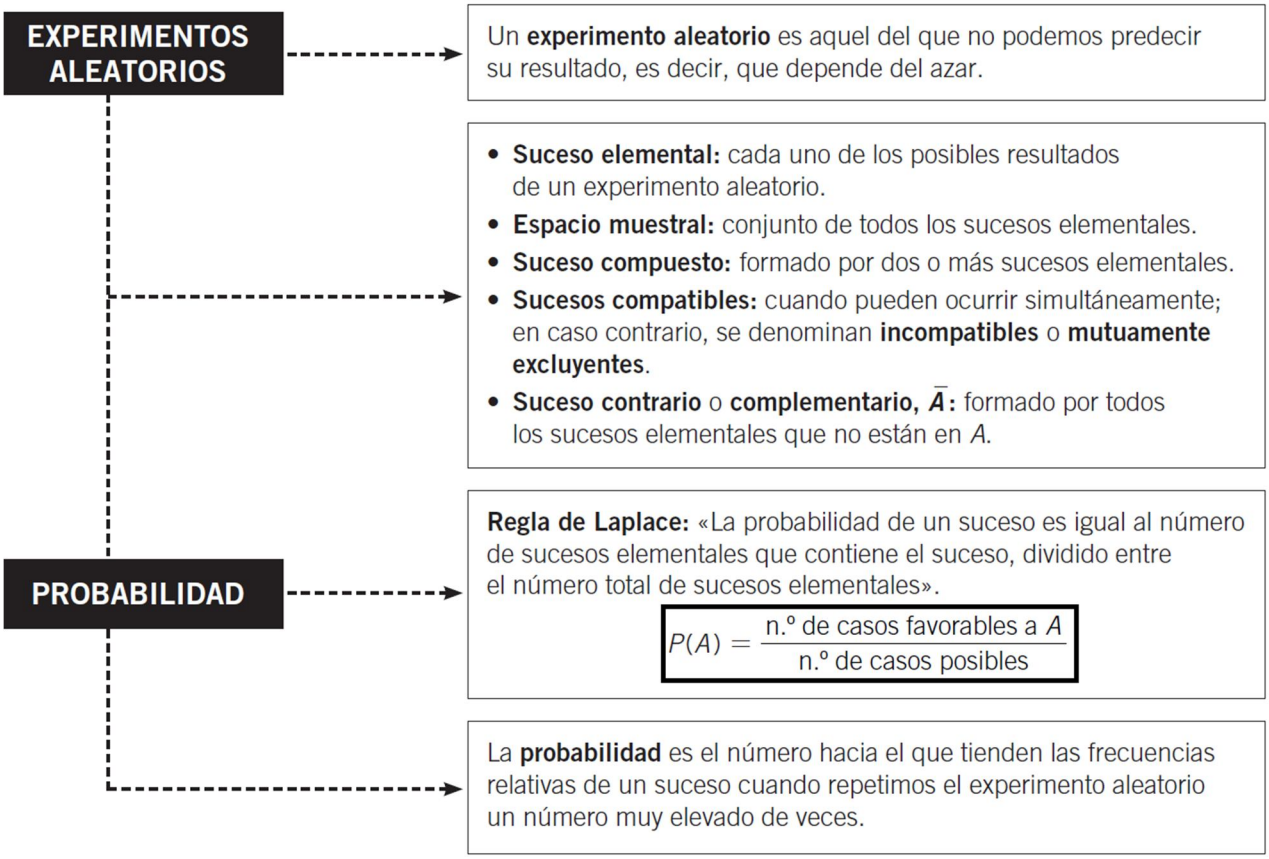
INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2$
[0, 30)	15	12	180	$\lvert 15 - 52{,}35 \rvert = 36{,}73$	1349,02	$12 \cdot 1349{,}02 = 16726228{,}28$
[30, 60)	45	20	900	$\lvert 45 - 52{,}35 \rvert = 7{,}35$	54,02	$20 \cdot 54{,}02 = 1080{,}4$
[60, 90)	75	10	750	$\lvert 75 - 52{,}35 \rvert = 22{,}65$	513,02	$10 \cdot 513{,}02 = 5130{,}2$
[90, 120]	105	7	735	$\lvert 105 - 52{,}35 \rvert = 52{,}65$	2772,02	$7 \cdot 2772{,}02 = 19404{,}14$
Suma		**49**	**2565**			**42.343,02**

$$\text{Desviación media} = \frac{36{,}73 \cdot 12 + 7{,}35 \cdot 20 + 22{,}65 \cdot 10 + 52{,}65 \cdot 7}{49} = \boxed{24{,}14}$$

$$\text{Varianza} = \frac{42\,343{,}20}{49} = \boxed{864{,}14} \qquad \text{Desviación típica} = \sqrt{\text{varianza}} = \sqrt{864{,}14} = \boxed{29{,}4}$$

UNIDAD 17. *PROBABILIDAD*.

0. Esquema de la unidad.



17.1. Experimentos aleatorios y deterministas.

• **Experimento determinista: (conocemos de antemano el resultado)** es aquel que, una vez estudiado, podemos predecir, es decir, que sabemos lo que sucederá antes de que ocurra.

Por ejemplo:

– Si ponemos un recipiente con agua a calentar, sabemos que el agua hierve a 100 °C.
– Si un coche que va a 100 km/h tarda en hacer un trayecto 2 horas, tenemos la certeza de que ha recorrido 200 km.

• **Experimento aleatorio: (Depende del azar)** es aquel cuyo resultado no se puede predecir, es decir, que por muchas veces que repitamos el experimento en igualdad de condiciones, no se conoce el resultado que se va a obtener.

El lenguaje utilizado para expresar experimentos aleatorios está relacionado con situaciones de incertidumbre, ya que se trata de situaciones de azar: «es más probable, es igual de probable, es imposible, es poco probable, es más seguro, es improbable, es casi seguro…».

Por ejemplo:

– Si lanzamos un dado, no podemos predecir el número que saldrá.
– Cuando sacamos una bola de una caja que contiene bolas de diferentes colores, no podemos predecir el color que obtendremos.

17.2. Espacio muestral y suceso elemental.

• El **espacio muestral** es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se representa por ***E***.

• Cada uno de los resultados posibles se denomina **suceso elemental**.

EJEMPLO

Determina el espacio muestral y sus sucesos elementales en estos experimentos.

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL	SUCESOS ELEMENTALES
Lanzar una moneda	$E = \{\text{cara, cruz}\}$	cara (c) y cruz (x)
Lanzar un dado	$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	1, 2, 3, 4, 5 y 6

17.3. Concepto de suceso.

Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Cada **suceso** está formado por uno o varios sucesos elementales.

• El **suceso seguro** está formado por todos los resultados posibles (sucesos elementales). **Se verifica siempre.**

Ej: Lanzar un dado, un suceso seguro es obtener un nº menor que 6

• El **suceso imposible** no contiene ningún suceso elemental. **Nunca se verifica.**

Ej: Lanzar un dado, un suceso imposible es obtener un nº mayor que 6

17.4. Operaciones con sucesos.

Una **operación entre sucesos** nos permite obtener otro suceso del mismo espacio muestral.

Las dos operaciones de sucesos más importantes son la unión (U) y la intersección (∩).

• **Unión de sucesos:** la unión de dos sucesos *A* y *B* está formada por los elementos (sucesos elementales) del suceso *A* y del suceso *B*:

$$A \cup B = A \text{ unión } B$$

• **Intersección de sucesos:** la intersección de dos sucesos *A* y *B* está formada por los elementos (sucesos elementales) comunes de los sucesos *A* y *B*:

$$A \cap B = A \text{ intersección } B$$

• Dado un suceso *A*, el **suceso contrario o complementario**, $\bar{A}$, está formado por los sucesos elementales del espacio muestral que no están en *A*.

• La unión de un suceso y su complementario es el espacio muestral y su intersección es el conjunto vacío.

$$A \cup \bar{A} = E \;;\; A \cap \bar{A} = \emptyset$$

• El complementario del complementario de un suceso coincide con el suceso de partida.

$$\overline{\overline{A}} = A$$

• El complementario de la unión de dos sucesos es la intersección de los complementarios.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

• El complementario de la intersección de dos sucesos es la unión de sus complementarios.

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

• Si dos **sucesos** no tienen ningún suceso elemental en común, se dice que son **incompatibles**:

$$A \cap B = \emptyset$$

• Si dos **sucesos** tienen algún suceso elemental en común, se dice que son **compatibles**:

$$A \cap B \neq \emptyset$$

17.5. Frecuencias absolutas y relativas de un suceso.

• **Frecuencia absoluta (f_i)** de un suceso es el número de veces que ocurre dicho suceso cuando se repite un experimento aleatorio *n* veces.

• **Frecuencia relativa (h_i)** de un suceso es el cociente de su frecuencia absoluta entre el número de veces que se repite el experimento:

$$h_i = \frac{f_i}{N}$$

17.6. Probabilidad de un suceso.

Es el número entre 0 y 1 que indica la posibilidad de que ocurra dicho suceso. A mayor probabilidad, mayor es la posibilidad de que ocurra.

Un suceso ocurre siempre si su **probabilidad es 1**, este **suceso es seguro**. **P (E) = 1.**

Un suceso ocurre siempre si su **probabilidad es 0**, este **suceso es imposible**. **P (Ø) = 0.**

EJEMPLO

Se lanza un dado de cuatro caras y se anotan las veces que aparece el número 1.

LANZAMIENTOS	20	40	60	80	100
f_i	7	11	15	18	27
h_i	0,35	0,275	**0,25**	0,225	0,27

Al obtener la tabla de frecuencias relativas correspondiente a este experimento, se observa que el número hacia el cual se aproxima la frecuencia del suceso de aparecer el número 1 es 0,25.

Por tanto, la probabilidad de obtener número 1 al lanzar un dado de cuatro caras es $P = 0{,}25$

17.7. Regla de Laplace.

Si los sucesos elementales de un experimento son equiprobables, decimos que es **regular.**

Cuando todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio son equiprobables, la probabilidad de un suceso *A* es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles.

$$P(A) = \frac{\text{n.º de casos favorables a } A}{\text{n.º de casos posibles}}$$

EJEMPLO

Se lanza un dado de seis caras al aire. El espacio muestral es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Calcula las siguientes probabilidades.

SUCESO	CASOS FAVORABLES	CASOS POSIBLES	$P = \frac{\text{CASOS FAVORABLES}}{\text{CASOS POSIBLES}}$
Salir número par	{2, 4, 6}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
Salir número menor que 5	{1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
Salir número par o menor que 5	{1, 2, 3, 4, 6}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \frac{5}{6}$
Salir número par y 4	{4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \frac{1}{6}$

17.8. Propiedades de la probabilidad.

Para cualquier suceso A se cumple que $0 \leq P(A) \leq 1$

- **La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio es 1.**

  Por ejemplo: en el lanzamiento de un dado, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

  $$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

  $$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

- La probabilidad de un suceso es un **número comprendido entre 0 y 1**.
- **La probabilidad del suceso seguro es 1 y la probabilidad del suceso imposible es 0.**
- Siendo A y B dos sucesos del espacio muestral E:

  – Si son incompatibles: $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.

  Por ejemplo, al lanzar un dado, dados los sucesos incompatibles $A =$ Salir cara número primo y $B =$ Salir cara múltiplo de 4, la probabilidad de que ocurra uno de los dos es:

  $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{4\} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

  – Si son compatibles: $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.

  Por ejemplo, si al lanzar un dado tenemos los sucesos $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{3, 6\}$, la probabilidad de que ocurra su unión es: $P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$.

- La **probabilidad del suceso contrario** de A, $\overline{A}$, es: $\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$.

  Por ejemplo, si al lanzar un dado consideramos $A = \{3, 6\}$, entonces $\overline{A} = \{1, 2, 4, 5\}$

  $$P(A) = \frac{2}{6} \qquad P(\overline{A}) = \frac{4}{6}$$

  Se comprueba que: $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \rightarrow \frac{4}{6} = 1 - \frac{2}{6}$